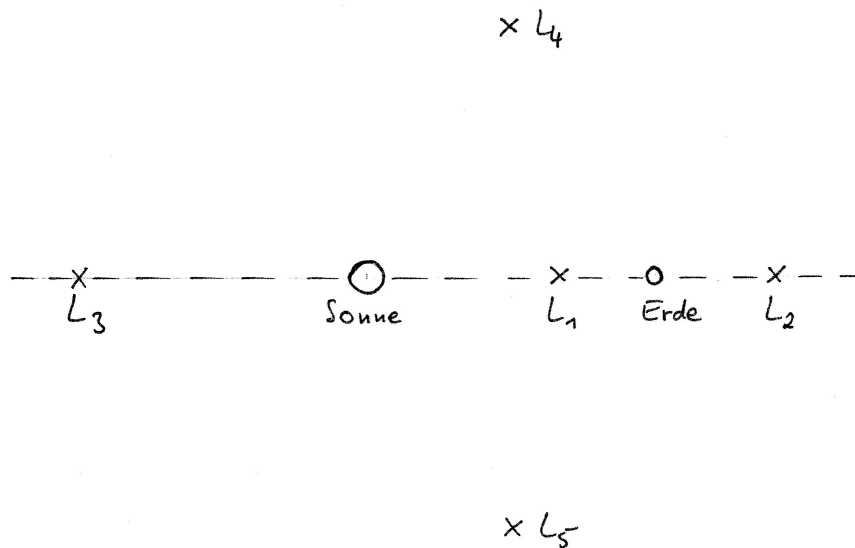


Die Lagrangepunkte oder: wo ist James Webb?

In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, wie man die Lagrangepunkte mit Schulmathematik und graphisch-numerischem Lösen von Gleichungen verstehen und ermitteln kann. Der 1995 gestartete Sonnenbeobachtungssatellit SOHO wurde am inneren Lagrangepunkt L_1 zwischen Erde und Sonne platziert. Das 2022 im Weltraum positionierte James Webb Teleskop befindet sich am äußeren Lagrangepunkt L_2 .

Planeten, die sich im Sonnensystem weiter innen befinden als die Erde, z.B. Venus, haben eine kürzere Umlaufzeit als Erde. Planeten, die sich weiter außen befinden, z.B. Mars, haben eine längere Umlaufzeit. Daher wird die Erde immer wieder von Venus überholt und überholt ihrerseits Mars ¹. Aber in den Lagrangepunkten, benannt nach *Joseph-Louis Lagrange (1736-1812)*, haben Objekte dieselbe Umlaufzeit um die Sonne wie die Erde und halten dabei auch ihren Abstand zur Erde. Es gibt noch den Lagrangepunkt L_3 , von der Erde aus gesehen auf der anderen Seite der Sonne, sowie die weiteren Lagrangepunkte L_4 und L_5 , die bei Planeten für sogenannte Trojaner interessant sind. Insbesondere finden sich Asteroiden an den Lagrangepunkten L_4 und L_5 des Systems aus Sonne und Jupiter.

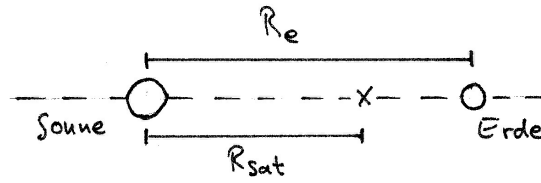


Lagrangepunkte schematisch

Kräftegleichgewicht

Die Erde hat eine sehr viel kleinere Masse als die Sonne und ein Satellit hat auch gegenüber der Erde eine vernachlässigbare Masse. Daher soll vorerst angenommen werden, dass die Sonne stillsteht und die Erde sich in einer Kreisbahn um sie herum bewegt. Mit dem Satelliten wird die Konstellation zu einer vereinfachten Version des Dreikörperproblems. Auf den Satelliten wirken bei seiner Bewegung die Gravitationskräfte von Sonne und Erde, er selber beeinflusst mit seiner sehr kleinen Masse Sonne und Erde jedoch nicht. Der Satellit läuft ebenfalls in einer Kreisbahn um die Sonne. Wir suchen zunächst nur Lagrangepunkte auf der Linie durch Sonne und Erde.

¹Für dieses Ausgangsschulwissen sind im gängigen Modell des Sonnensystems gegenseitige Beeinflussungen der Planeten nicht berücksichtigt, was wegen der großen Abstände auch gerechtfertigt ist.



Radien im ersten Rechenmodell

Definition der benutzten Größen:

γ :	Gravitationskonstante	R_e :	Abstand der Erde von der Sonne
m_s :	Masse der Sonne	R_{sat} :	Abstand des Satelliten von der Sonne
m_e :	Masse der Erde	v_e :	Bahngeschwindigkeit der Erde
m_{sat} :	Masse des Satelliten	v_{sat} :	Bahngeschwindigkeit des Satelliten

Die Bahngeschwindigkeit der Erde ergibt sich daraus, dass die Gravitationskraft der Sonne auf die Erde und die Zentrifugalkraft sich ausgleichen müssen.

$$\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_e}{R_e^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{R_e} \Rightarrow v_e^2 = \gamma \cdot \frac{m_s}{R_e}$$

Damit der Satellit die relative Position zur Erde hält, also auf der Verbindungslinie Erde-Sonne bleibt, muss er dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben wie die Erde. Daraus ergibt sich seine Bahngeschwindigkeit.

$$\frac{v_{sat}}{R_{sat}} = \frac{v_e}{R_e} \Rightarrow v_{sat} = \frac{R_{sat} \cdot v_e}{R_e}$$

Es ist sofort einzusehen, dass es zwischen Erde und Sonne einen Punkt gibt, an dem sich auf einen Satelliten die Gravitationskräfte von Sonne und Erde aufheben. Das ist jedoch nicht der Lagrangepunkt, weil wegen der Drehbewegung des Systems die Zentrifugalkraft mitberücksichtigt werden muss. Am Lagrangepunkt L_1 heben die Gravitation von der Erde und die Zentrifugalkraft zusammen die Gravitation von der Sonne auf. Mit der Zentrifugalkraft offenbart sich, wie die weiteren Lagrangepunkte außen möglich sind. An den Punkten L_2 und L_3 wirkt die Zentrifugalkraft gegen die gemeinsame Gravitationskraft von Sonne und Erde.

Der Satellit erfährt von der Sonne die Gravitationskraft $F_s = \gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{R_{sat}^2}$

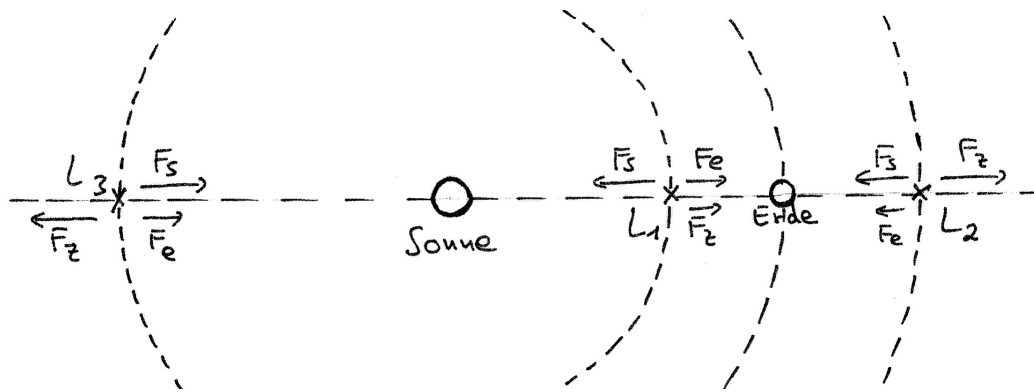
und von der Erde die Gravitationskraft $F_e = \gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{(R_{sat} - R_e)^2}$

(wenn er sich auf derselben Seite der Sonne befindet wie die Erde. Das Vorzeichenproblem, dass es $R_{sat} + R_e$ heißen muss, wenn sich der Satellit auf der anderen Seite der Sonne befindet, wird sich bei der im Folgenden vorgestellten Rechenweise von selber lösen.)

Vorbereitend wird noch der Ausdruck für die Zentrifugalkraft des Satelliten umgeformt:

$$F_z = m_{sat} \cdot \frac{v_{sat}^2}{R_{sat}} = \frac{m_{sat}}{R_{sat}} \cdot \frac{R_{sat}^2 \cdot v_e^2}{R_e^2} = m_{sat} \cdot \frac{v_e^2}{R_e^2} \cdot R_{sat}$$

Im Moment liegen alle Kräfte auf einer Linie, der x-Achse. Um alle drei Lagrangepunkte gemeinsam durch graphische Bestimmung von Nullstellen einer Funktion zu finden, setzen wir Kräfte positiv, wenn sie im Bild auf der nächsten Seite nach rechts zeigen, und negativ, wenn sie nach links zeigen. Die Zentrifugalkraft F_z ist also negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$. Die Gravitationskraft von der Sonne F_s ist positiv für $x < 0$ und negativ für $x > 0$. Die Gravitationskraft von der Erde F_e ist positiv für $x < R_e$ und negativ für $x > R_e$.



Richtungen der Kräfte

Ehe reale Werte aus dem Sonnensystem eingesetzt werden, soll die Rechnung mit handlicheren Zahlen vorgeführt werden. Ich setze deshalb:

$\gamma=1$, $R_e=1.2$ (Längeneinheiten), $m_s=100$ (Masseneinheiten), $m_e=20$ (Masseneinheiten), $m_{sat}=1$ (Masseneinheit). Damit wird $v_e^2 = 83.33$.

Wir suchen ja die Position des Satelliten, daher ist die Variable $x = R_{sat}$.

Die Funktionen für die Kräfte sind:

$$F_s(x) = -\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{x^2} \cdot \frac{x}{|x|} = -1 \cdot \frac{100 \cdot 1}{x^2} \cdot \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 100/x^2 & \text{für } x < 0 \\ -100/x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

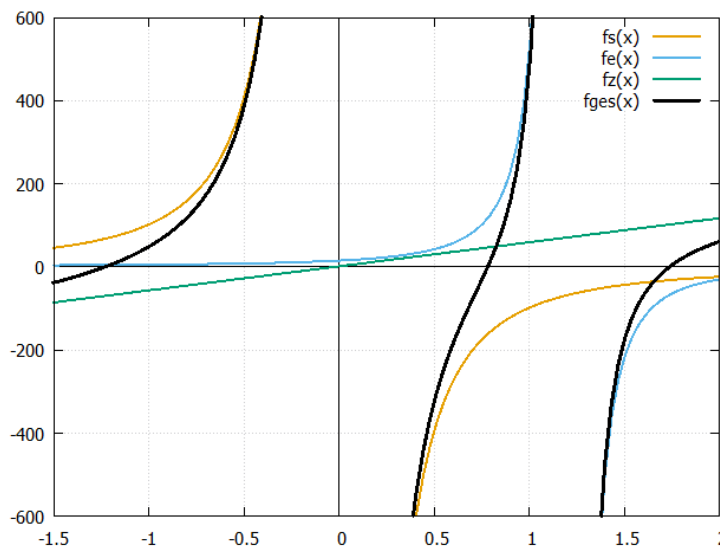
$$F_e(x) = -\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{(x - R_e)^2} \cdot \frac{x - R_e}{|x - R_e|} = -1 \cdot \frac{20 \cdot 1}{(x - 1.2)^2} \cdot \frac{x - 1.2}{|x - 1.2|} = \begin{cases} 20/(x - 1.2)^2 & \text{für } x < 1.2 \\ -20/(x - 1.2)^2 & \text{für } x > 1.2 \end{cases}$$

$$F_z(x) = m_{sat} \cdot \frac{v_e^2}{R_e^2} \cdot x = 1 \cdot \frac{83.33}{1.2^2} \cdot x$$

Je nachdem, welches Programm zum Zeichnen der Funktionen benutzt wird, kann man eine Fallunterscheidung benutzen oder den hier ebenfalls notierten Trick mit dem Absolutbetrag.

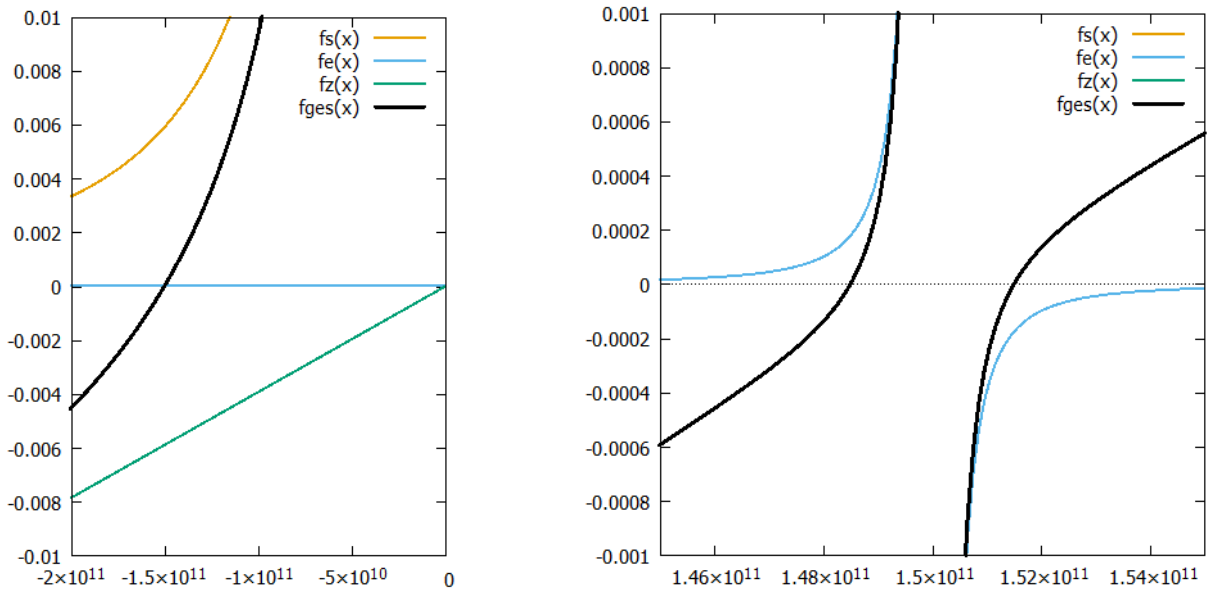
$F_z(x)$ ist so automatisch negativ für negative x und positiv für positive x .

Die Gesamtkraft wird definiert als $F_{ges}(x) = F_s(x) + F_e(x) + F_z(x)$ und von dieser suchen wir graphisch oder numerisch die Nullstellen. Mit einem graphischen Taschenrechner oder GeoGebra erhalten wir $x_1 = 0.79$, $x_2 = 1.74$ und $x_3 = -1.22$, also $L_1(0.79|0)$, $L_2(1.74|0)$, $L_3(-1.22|0)$.



Kräfte auf der Linie Sonne-Erde mit der Sonne als Zentrum

Die Masse m_{sat} des Satelliten ist in allen Kräften als linearer Faktor enthalten, spielt also keine Rolle bei der Nullstellensuche von F_{ges} . Wir lassen den unrealistischen Wert $m_{sat} = 1$ kg. Sonst sind nun natürlich die realen Werte dran ²: $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $m_s = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $m_e = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_e = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ und damit berechnet $v_e^2 = 8.84 \cdot 10^7 \text{ (m/s)}^2$.



Kräfte mit den realen Werten für Sonne und Erde

Man muss ziemlich hineinzoomen, um die Lagrangepunkte zu finden. L_1 und L_2 liegen im Vergleich zum Abstand zur Sonne sehr nahe bei der Erde. Die Nullstellensuche von F_{ges} ergibt: $x_1 = 1.485 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $x_2 = 1.515 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $x_3 = -1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}$, also $L_1 = (1.485 \cdot 10^{11} | 0)$, $L_2 = (1.515 \cdot 10^{11} | 0)$ und $L_3 = (-1.50 \cdot 10^{11} | 0)$. L_1 liegt 1.5 Millionen Kilometer von der Erde entfernt in Richtung der Sonne, L_2 liegt 1.5 Millionen Kilometer von der Erde entfernt auf der sonnenabgewandten Seite. L_3 liegt auf der anderen Seite der Sonne, ziemlich genau soweit von der Sonne entfernt wie die Erde.

Potential

Wahrscheinlich wurde in der Schule die Energie einer Probemasse im Gravitationsfeld einer Punktmasse bzw. kugelförmigen Masse behandelt,

$$E_s = -\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{r}$$

hier für den Satelliten im Gravitationsfeld der Sonne, wobei der Abstand noch mit r bezeichnet ist. Die Kraft ist dann der negative Gradient bzw. hier das Negative der Ableitung nach r .

$$F_s = -\frac{d}{dr} \left(-\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{r} \right) = -\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{r^2}$$

(Mit r besagt das Minuszeichen, dass die Kraft zum Zentrum hin gerichtet ist.)

Ohne den Faktor m_{sat} (die Probemasse) spricht man statt von der Energie vom Potential

$$\Phi_s = -\gamma \cdot \frac{m_s}{r}$$

²Es geht hier darum, eine Vorstellung der Größenordnung zu entwickeln, wie weit die Lagrangepunkte von der Erde entfernt sind, nicht um mit Literaturwerten vergleichbare Genauigkeit; daher sind drei signifikante Stellen der Ausgangswerte ausreichend.

Der Abstand von der Sonne ist R_{sat} und fürs Rechnen x . Zu $F_s(x)$ gehört also das Potential

$$\Phi_s(x) = -\gamma \cdot \frac{m_s}{|x|}$$

ein Riesentrichter, in den der Satellit ohne weitere Kräfte hineinfallen würde.

Für die Gravitation von der Erde kommt ein weiterer Potentialtrichter dazu. Einzig ungewohnt ist hierbei, dass er nicht bei Koordinate Null liegen kann, weil der Nullpunkt als die Position der Sonne festgelegt ist. Die Funktion für den Potentialtrichter mit Polstelle bei R_e lautet

$$\Phi_e(x) = -\gamma \cdot \frac{m_e}{|x - R_e|}$$

Als Energie haben wir $E_e(x) = -\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{|x - R_e|}$

und die Kraft wird $F_e = -\frac{d}{dx} \left(-\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{|x - R_e|} \right) = -\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{(x - R_e)^2} \cdot \frac{x - R_e}{|x - R_e|}$

Wie aber bringen wir die Zentrifugalkraft in die Potentiallandschaft ein? Wir brauchen eine Funktion $\Phi_z(x)$, deren negative Ableitung $F_z(x)$ ist. Da wir durch Umformen F_z als eine lineare Funktion in x geschrieben haben, liefert einfaches Integrieren:

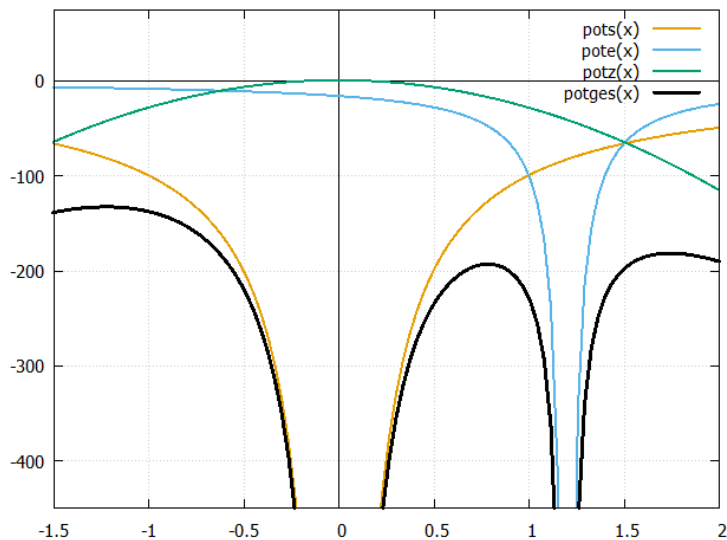
$$\Phi_z(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_e^2}{R_E^2} \cdot x^2$$

Dazu passen $E_z(x) = -\frac{m_{sat} \cdot v_e^2}{2 \cdot R_e^2} \cdot x^2$ und $F_z(x) = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{m_{sat} \cdot v_e^2}{2 \cdot R_e^2} \cdot x^2 \right) = \frac{m_{sat} \cdot v_e^2}{R_e^2} \cdot x$

Mit dem handlichen Zahlenbeispiel plotten wir die einzelnen Potentiale

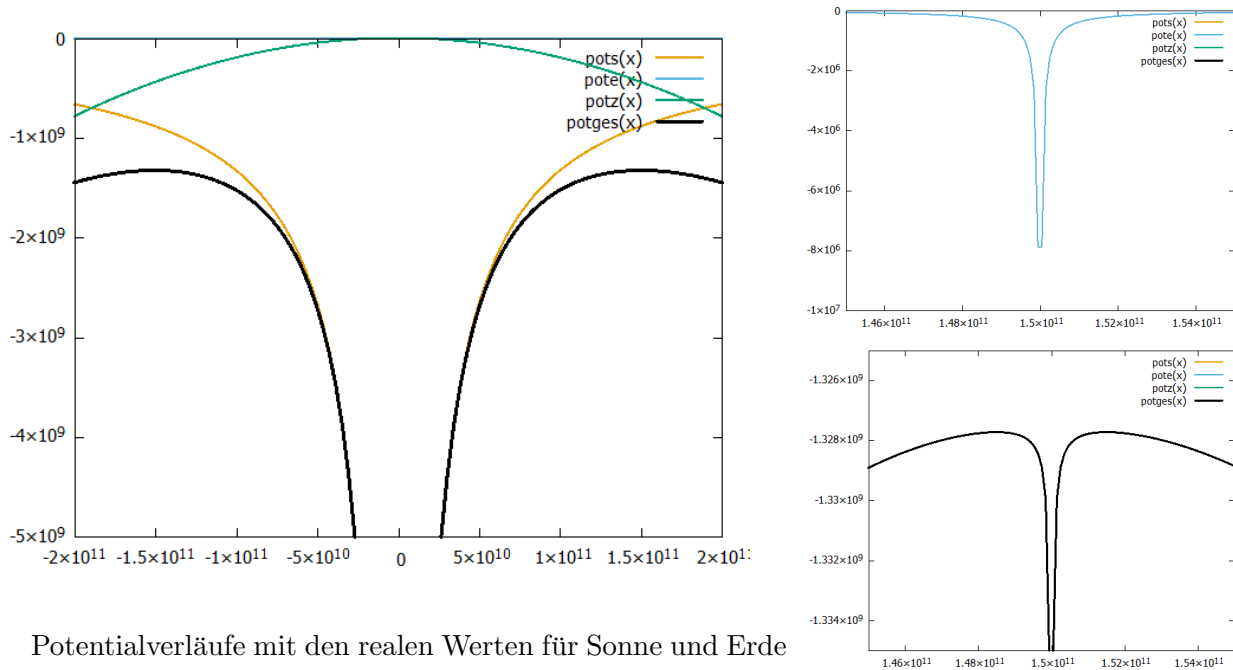
$$\begin{aligned} \Phi_s(x) &= -\gamma \cdot \frac{m_s}{|x|} = -1 \cdot \frac{100}{|x|} \\ \Phi_e(x) &= -\gamma \cdot \frac{m_e}{|x - R_e|} = -1 \cdot \frac{20}{|x - 1.2|} \\ \Phi_z(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_e^2}{R_e^2} \cdot x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{83.33}{1.2^2} \cdot x^2 \end{aligned}$$

sowie deren Summe $\Phi_{ges}(x) = \Phi_s(x) + \Phi_e(x) + \Phi_z(x)$. Diese Funktion hat Hochpunkte bei den x -Werten, die den Lagrangepunkten L_1 , L_2 und L_3 entsprechen.



Potential auf der Linie Sonne-Erde mit der Sonne als Drehzentrum

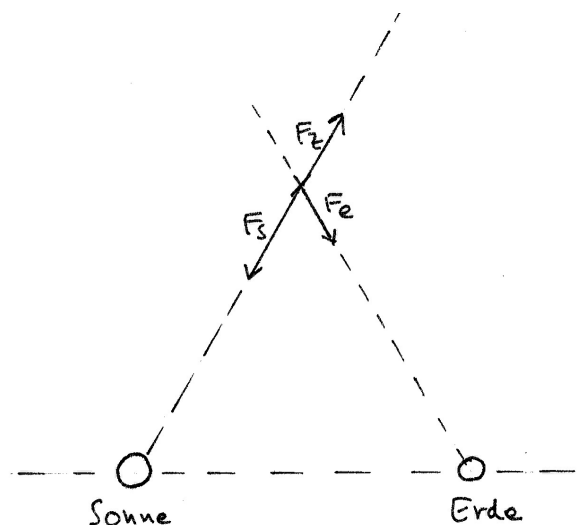
Im folgenden Bild ist noch das Potential für die realen Werte der Massen von Sonne und Erde sowie deren Abstand dargestellt. Die Lagrangepunkte sind wieder die Hochpunkte der schwarzen Kurve. L_3 liegt bei $-1.5 \cdot 10^{11}$ m, also auf der anderen Seite der Sonne im selben Abstand wie die Erde. L_1 und L_2 sind im Maßstab des linken Bilds gar nicht auflösbar. Erst sehr starkes Hineinzoomen um $x = 1.5 \cdot 10^{11}$ offenbart, dass dort zwei Hochpunkte eng beieinanderliegen, einer auf jeder Seite des kleinen Potentialtrichters der Erdgravitation.



Potentialverläufe mit den realen Werten für Sonne und Erde

Noch einmal von vorne

Warum erweitern wir jetzt nicht direkt das Gleichsetzen der Kräfte ins Zweidimensionale und ermitteln L_4 und L_5 ? Nehmen wir weiterhin die Sonne als ruhendes Zentrum und lassen sowohl die Erde als auch den Satelliten um sie kreisen. Am Satelliten zeigt die Gravitationskraft der Sonne zum Zentrum. Die Zentrifugalkraft zeigt vom Zentrum weg. Diese beiden Kräfte liegen also entgegengesetzt auf der radialen Linie. Die Gravitationskraft von der Erde hat sicher eine Komponente senkrecht zu dieser radialen Linie. So können sich die Kräfte nicht ausgleichen. Spätestens zur Betrachtung von L_4 und L_5 ist unser bisheriges Modell zu stark vereinfacht.



Kräfte bei Drehung um die Sonne

Wir müssen berücksichtigen, dass die Sonne und die Erde um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen³. Der Satellit habe immer noch eine vernachlässigbare Masse und kreise dann ebenfalls um diesen Schwerpunkt. Damit ergibt sich ein Winkel zwischen der Gravitationskraft von der

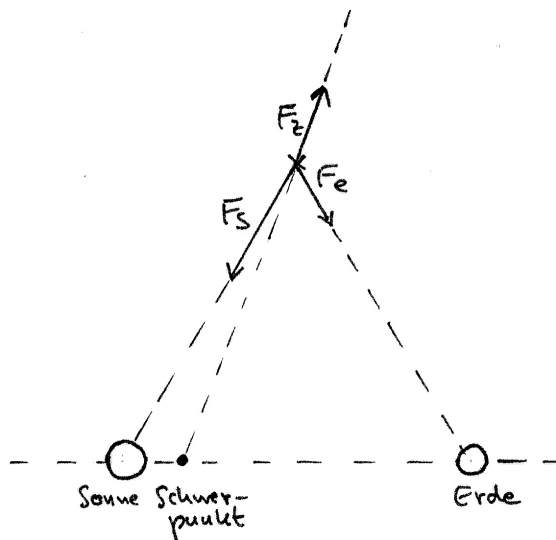
³was natürlich die Existenz aller anderen Planeten leugnet, aber sei's drum.

Sonne und der Zentrifugalkraft, so dass mit der Gravitationskraft von der Erde ein Gleichgewicht der drei Kräfte möglich wird.

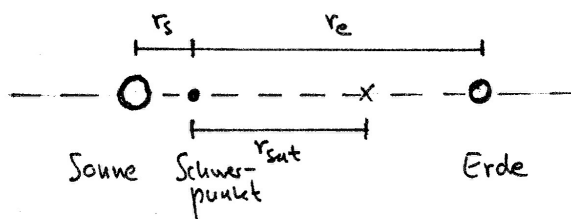
Ehe wir uns in diesem etwas korrekteren Modell L_4 und L_5 zuwenden, soll untersucht werden, was die Betrachtung der Kreisbewegungen um den Schwerpunkt statt um die Sonne an den Ergebnissen für L_1 , L_2 und L_3 auf der Verbindungslinie ändert.

Wir bezeichnen nun mit

- r_e : den Abstand der Erde - Schwerpunkt
- r_s : den Abstand Sonne - Schwerpunkt
- r_{sat} : den Abstand Satellit - Schwerpunkt
- v_e : die Bahngeschwindigkeit der Erde um den Schwerpunkt
- v_{sat} : die Bahngeschwindigkeit des Satelliten um den Schwerpunkt



Kräfte bei Drehung um den Schwerpunkt



Radien im zweiten Rechenmodell

Zunächst einmal ergibt sich daraus eine leicht andere Bahngeschwindigkeit für die Erde aus der Gleichsetzung von Gravitationskraft von der Sonne und Zentrifugalkraft:

$$\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_e}{(r_e + r_s)^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r_e} \Rightarrow v_e^2 = \gamma \cdot \frac{m_s \cdot r_e}{(r_e + r_s)^2}$$

Die Skalierung auf die Bahngeschwindigkeit des Satelliten bleibt gleich:

$$\frac{v_{sat}}{r_{sat}} = \frac{v_e}{r_e} \Rightarrow v_{sat} = \frac{r_{sat} \cdot v_e}{r_e}$$

Wir passen unsere Kräftefunktionen entlang der x-Achse an. Wiederum sollen Kräfte positiv herauskommen, wenn sie nach rechts zeigen, und negativ, wenn sie nach links zeigen. Der Nullpunkt ist der Schwerpunkt. Die Erde befindet sich bei r_e , die Sonne bei $-r_s$. x wird die Koordinate des Satelliten, also $x = r_{sat}$. Auch hier soll erst der Fall mit handlichen Zahlen als Rechenbeispiel dienen.

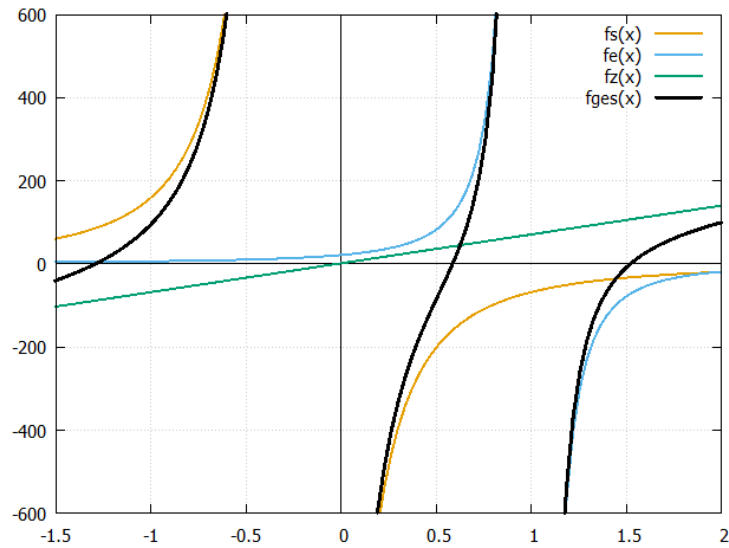
$\gamma=1$, $m_s=100$, $m_e=20$, $m_{sat}=1$, $r_e=1.0$, $r_s=0.2$ (ergibt sich durch die Schwerpunktbedingung) und damit $v_e^2 = 69.44$.

$$F_s(x) = -\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{(x + r_s)^2} \cdot \frac{x + r_s}{|x + r_s|} = -1 \cdot \frac{100 \cdot 1}{(x + 0.2)^2} \cdot \frac{x + 0.2}{|x + 0.2|} = \begin{cases} 100/(x + 0.2)^2 & \text{für } x < -0.2 \\ -100/(x + 0.2)^2 & \text{für } x > -0.2 \end{cases}$$

$$F_e(x) = -\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{(x - r_e)^2} \cdot \frac{x - r_e}{|x - r_e|} = -1 \cdot \frac{20 \cdot 1}{(x - 1.0)^2} \cdot \frac{x - 1.0}{|x - 1.0|} = \begin{cases} 20/(x - 1.0)^2 & \text{für } x < 1.0 \\ -20/(x - 1.0)^2 & \text{für } x > 1.0 \end{cases}$$

$$F_z(x) = m_{sat} \cdot \frac{v_e^2}{r_e^2} \cdot x = 1 \cdot \frac{69.44}{1^2} \cdot x$$

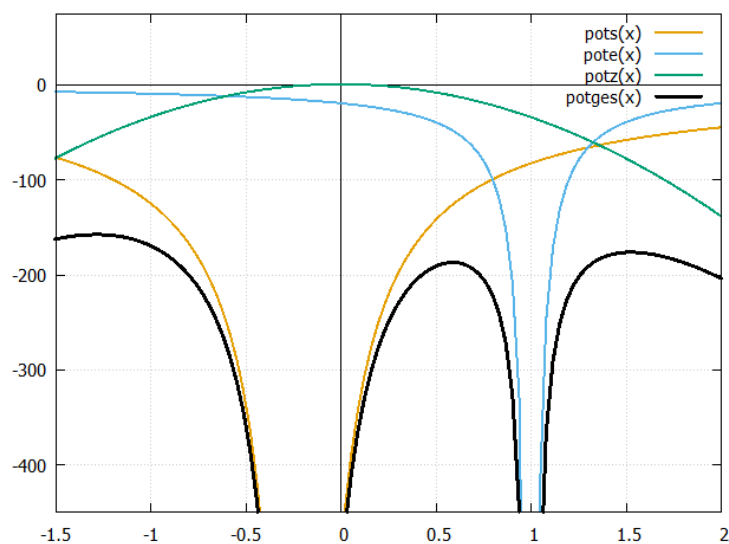
Graphisches Ermitteln der Nullstellen der Gesamtkraft $F_{ges}(x) = F_s(x) + F_e(x) + F_z(x)$ liefert $x_1 = 0.59$, $x_2 = 1.53$, $x_3 = -1.28$, also $L_1(0.59|0)$, $L_2(1.53|0)$, $L_3(-1.28|0)$.



Kräfte auf der Linie Sonne-Erde mit dem Schwerpunkt als Zentrum

Für die Lagrangepunkte L_1 und L_2 macht es selbst in diesem Beispiel mit handlichen Zahlen, in dem die Erdmasse nicht viel kleiner als die Sonnenmasse ist, kaum einen Unterschied, ob der Drehpunkt in der Sonne oder im Schwerpunkt liegt. Wir haben unser Koordinatensystem um 0.2 nach rechts geschoben und x_1 und x_2 sind etwa 0.2 kleiner als vorher, also im selben Abstand zur Erde. Für L_3 kommen die Abstände zu Sonne und Erde allerdings anders heraus.

Bei den realen Werten macht es für L_1 , L_2 und L_3 keinen Unterschied, ob man den Drehpunkt und den Nullpunkt ins Zentrum der Sonne oder in den Schwerpunkt legt. Der Schwerpunkt des Systems aus Sonne und Erde liegt nur 450000 m vom Mittelpunkt der Sonne entfernt; das ist nichts gegen die Entfernung zur Erde.



Potential auf der Linie Sonne-Erde mit dem Schwerpunkt als Drehzentrum

Der Vollständigkeit halber sollen auch hier die eindimensionalen Potentialfunktionen entlang der x-Achse aufgestellt und gezeigt werden. Im handlichen Zahlenbeispiel:

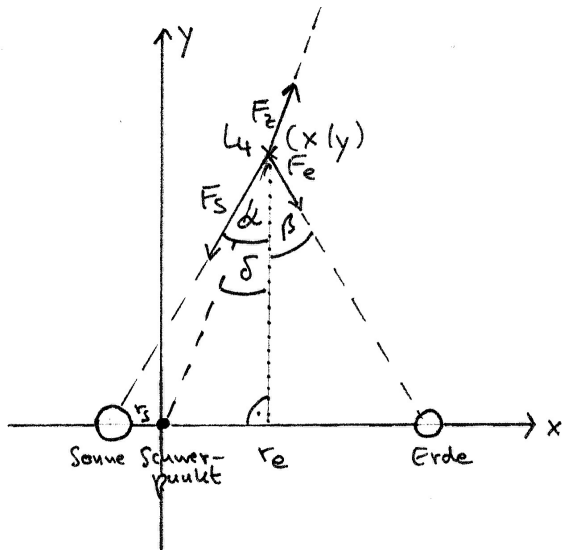
$$\begin{aligned}\Phi_s(x) &= -\gamma \cdot \frac{m_s}{|x + r_s|} = -1 \cdot \frac{100}{|x + 0.2|} \\ \Phi_e(x) &= -\gamma \cdot \frac{m_e}{|x - r_e|} = -1 \cdot \frac{20}{|x - 1.0|} \\ \Phi_z(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_e^2}{r_e^2} \cdot x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{69.44}{1.0^2} \cdot x^2\end{aligned}$$

und $\Phi_{ges}(x)$ ist natürlich die Summe dieser drei (Abbildung auf der vorherigen Seite unten).

Mit den realen Werten für Sonne und Erde sehen auch die Potentialbilder nicht anders aus als im ersten einfachen Modell mit der Sonne als Drehpunkt.

Potentiallandschaft zweidimensional

Zum Wiedererkennen von Darstellungen aus Literatur und Internet beginnen wir das zweidimensionale Problem, das L_4 und L_5 einschließt, mit dem Potential.

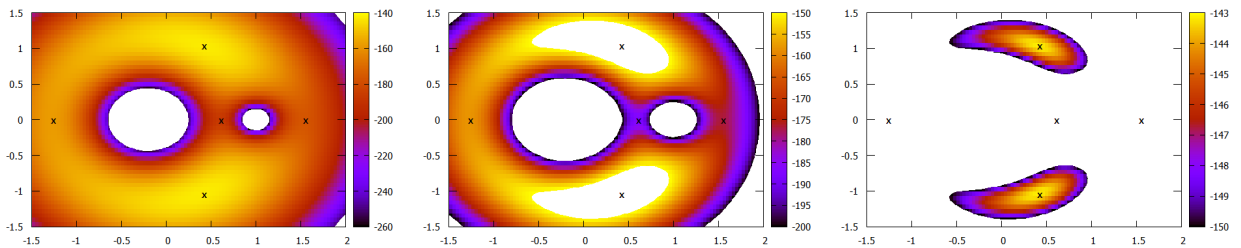
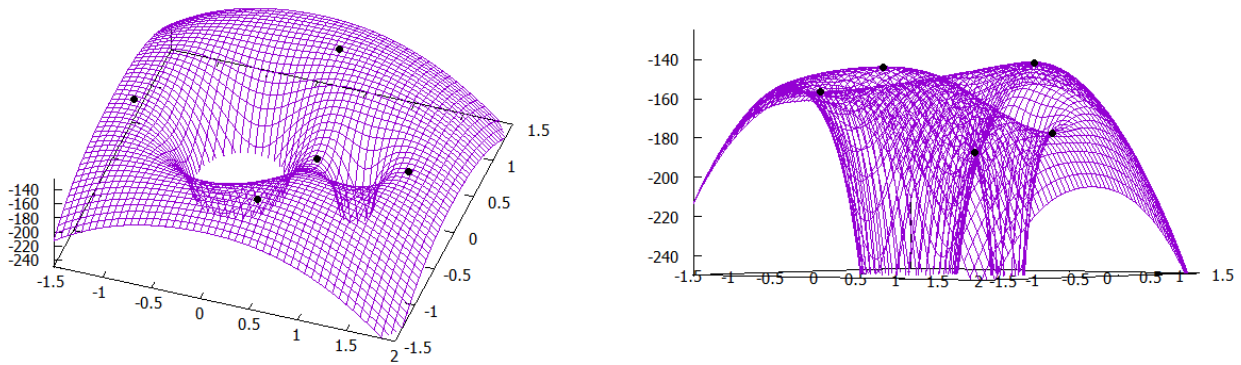


Ich möchte bei kartesischen Koordinaten bleiben. Der Nullpunkt liegt im Schwerpunkt. Die Sonne befindet sich bei $(-r_s|0)$, die Erde bei $(r_e|0)$ und unser hypothetischer Satellit bei $(x|y)$. Der Abstand zur Sonne ist $\sqrt{(x + r_s)^2 + y^2}$, der Abstand zur Erde $\sqrt{(x - r_e)^2 + y^2}$ und der Abstand zum Mittelpunkt seiner Kreisbahn, dem Schwerpunkt ist $\sqrt{x^2 + y^2}$. Die drei Potentiale als Funktionen von x und y lauten somit - auch gleich mit den Zahlen aus dem handlichen Beispiel eingesetzt -

Koordinaten in zwei Dimensionen

$$\begin{aligned}\Phi_s(x, y) &= -\gamma \cdot \frac{m_s}{\sqrt{(x + r_s)^2 + y^2}} = -1 \cdot \frac{100}{\sqrt{(x + 0.2)^2 + y^2}} \\ \Phi_e(x, y) &= -\gamma \cdot \frac{m_e}{\sqrt{(x - r_e)^2 + y^2}} = -1 \cdot \frac{20}{\sqrt{(x - 1.0)^2 + y^2}} \\ \Phi_z(x, y) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_e^2}{r_e^2} \cdot (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{69.44}{1.0^2} \cdot (x^2 + y^2)\end{aligned}$$

In den folgenden Bildern ist die Summe $\Phi_{ges}(x, y)$ dargestellt. L_1 als Hochpunkt zwischen den Potentialtrichtern von Sonne und Erde sieht man. Dass es mit dem Abfall nach außen aufgrund des Potentialanteils für die Zentrifugalkraft auf der Linie Sonne-Erde außen je einen weiteren Hochpunkt geben muss, also L_2 und L_3 , glaubt man. L_4 und L_5 muss man mühsam mit Konturliniendarstellungen herauskitzeln.



oben: das Potential als Höhenlandschaft in zwei Perspektiven; die Lagrangepunkte sind markiert.
 unten: als Farbdarstellung (die Lagrangepunkte sind ebenfalls markiert)
 mittleres Bild unten: Wertebereich, um L_1 , L_2 und L_3 gut zu sehen
 rechtes Bild unten: Wertebereich, um L_4 und L_5 gut zu sehen

Kräftegleichgewicht zweidimensional

Können wir auch weiter mit den Kräften rechnen und die Orte bestimmen, an denen die Gesamtkraft Null ist? Wir suchen die Punkte $(x|y)$, an denen der (negative) Gradient des Gesamtpotentials den Nullvektor ergibt. Mit Schulmathematik betrachten wir die Komponenten der Kräfte in den Koordinatenrichtungen:

Die x-Komponente der Gravitationskraft von der Sonne beträgt

$$F_{s,x} = F_s \cdot \sin(\alpha) = -\gamma \cdot \frac{m_s \cdot m_{sat}}{(x + r_s)^2 + y^2} \cdot \frac{x + r_s}{\sqrt{(x + r_s)^2 + y^2}} = -\frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot (x + r_s)}{((x + r_s)^2 + y^2)^{3/2}}$$

Die x-Komponente der Gravitationskraft von der Erde beträgt

$$F_{e,x} = F_e \cdot \sin(\beta) = \gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{sat}}{(x - r_e)^2 + y^2} \cdot \frac{r_e - x}{\sqrt{(x - r_e)^2 + y^2}} = \frac{\gamma \cdot m_e \cdot m_{sat} \cdot (r_e - x)}{((r_e - x)^2 + y^2)^{3/2}}$$

Die x-Komponente der Zentrifugalkraft beträgt

$$F_{z,x} = F_z \cdot \sin(\delta) = \frac{m_{sat} \cdot v_{sat}^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{m_{sat} \cdot v_e^2 \cdot (x^2 + y^2)}{r_e^2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{m_{sat} \cdot v_e^2 \cdot x}{r_e^2}$$

Den Zusammenhang zu den Potentialen sieht man übrigens folgendermaßen:

$$F_{s,x} = -\frac{\partial}{\partial x} (m_{sat} \cdot \Phi_s) = -\frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot (x + r_s)}{((x + r_s)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$F_{e,x} = -\frac{\partial}{\partial x} (m_{sat} \cdot \Phi_e) = -\frac{\gamma \cdot m_e \cdot m_{sat} \cdot (x - r_e)}{((x - r_e)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$F_{z,x} = -\frac{\partial}{\partial x} (m_{sat} \cdot \Phi_z) = m_{sat} \cdot \frac{v_e^2}{r_e^2} \cdot x$$

Mit den Werten aus dem handlichen Beispiel ergeben sich folgende Funktionen:

$$F_{s,x}(x, y) = -\frac{1 \cdot 100 \cdot 1 \cdot (x + 0.2)}{((x + 0.2)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{e,x}(x, y) = \frac{1 \cdot 20 \cdot 1 \cdot (1.0 - x)}{((1.0 - x)^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$F_{z,x}(x, y) = 1 \cdot \frac{69.44}{1.0^2} \cdot x \quad \text{bzw. deren Summe } F_{ges,x}(x, y).$$

Man kann als Anhaltspunkt in einen surface-mesh-plot von $F_{ges,x}$ die Ebene $z = 0$ mit einzeichnen und die Schnittkurve anschauen. Ohne 3D-Darstellung und auch um die Lagrangepunkte später numerisch zu ermitteln, lasse ich das folgende FORTRAN-Programm Nulldurchgänge von $F_{ges,x}(x, y)$ suchen und in eine Datei schreiben.

```

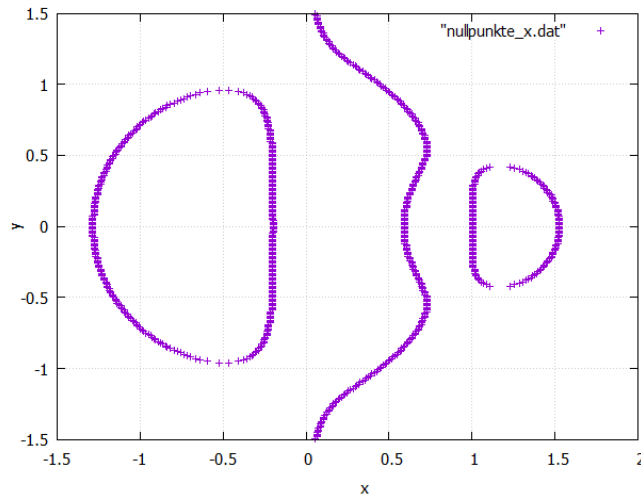
program lagrangex
implicit none
integer xzaehl,yzaehl,io_error
real gam,ms,me,msat,re,rs,ve2,x,y
real fsx,fex,fzx
real fgesxalt,fgesx
gam=1.0
ms=100.0
me=20.0
re=1.0
rs=me/ms*re
msat=1.0
ve2=gam*ms*re/(re+rs)**2
open(unit=11,file='nullpunkte_x.dat',status='unknown',action='write',iostat=io_error)
y=-1.5

do yzaehl=1,300
y=-1.5+3.0/300.0*real(yzaehl)
x=-1.5
fsx=-gam*ms*msat*(x+rs)/((x+rs)**2+y**2)**1.5
fex=-gam*me*msat*(x-re)/((x-re)**2+y**2)**1.5
fzx=msat*ve2/re**2*x
fgesxalt=fsx+fex+fzx

do xzaehl=1,350
x=-1.5+3.5/350.0*real(xzaehl)
fsx=-gam*ms*msat*(x+rs)/((x+rs)**2+y**2)**1.5
fex=-gam*me*msat*(x-re)/((x-re)**2+y**2)**1.5
fzx=msat*ve2/re**2*x
fgesx=fsx+fex+fzx
if ((fgesxalt.le.0.0).and.(fgesx.ge.0.0)) write(11,*) x-0.005,y
if ((fgesxalt.ge.0.0).and.(fgesx.le.0.0)) write(11,*) x-0.005,y
fgesxalt=fgesx
enddo
enddo
close(unit=11)
end program lagrangex

```

In der xy-Ebene markiert ergeben die Nulldurchgänge diese Konturlinien:



Nulldurchgänge von $F_{ges,x}$

Wohlgermerkt muss an einem Lagrangepunkt nicht nur die x-Komponente der Kraft Null sein, sondern die gesamte Kraft. Also führen wir analoge Rechnungen für die y-Komponente durch (manche Zwischenrechnungen erlaube ich mir nun etwas abzukürzen):

$$F_{s,y} = F_s \cdot \cos(\alpha) = -\frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot y}{((x + r_s)^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\partial}{\partial y} (m_{sat} \cdot \Phi_s)$$

$$F_{e,y} = -F_e \cdot \cos(\beta) = -\frac{\gamma \cdot m_e \cdot m_{sat} \cdot y}{((r_e - x)^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\partial}{\partial y} (m_{sat} \cdot \Phi_e)$$

$$F_{z,y} = F_z \cdot \cos(\delta) = m_{sat} \cdot \frac{v_e^2}{r_e^2} \cdot y = -\frac{\partial}{\partial y} (m_{sat} \cdot \Phi_z)$$

Mit den Werten aus dem handlichen Beispiel:

$$F_{s,y}(x, y) = -\frac{1 \cdot 100 \cdot 1 \cdot y}{((x + 0.2)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{e,y}(x, y) = -\frac{1 \cdot 20 \cdot 1 \cdot y}{((1.0 - x)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{z,y}(x, y) = 1 \cdot \frac{69.44}{1.0^2} \cdot y$$

Wo deren Summe $F_{ges,y}$ Nulldurchgänge hat, ermittelt folgendes FORTRAN-Programm:

```

program lagrangey
implicit none
integer xzaehl,yzaehl,io_error
real gam,ms,me,msat,re,rs,ve2,x,y
real fsy,fey,fzy
real fgesyalt,fgesy
gam=1.0
ms=100.0
me=20.0
re=1.0
rs=me/ms*re
msat=1.0
ve2=gam*ms*re/(re+rs)**2
open(unit=11,file='nullpunkte_y.dat',status='unknown',action='write',iostat=io_error)
x=-1.5

```



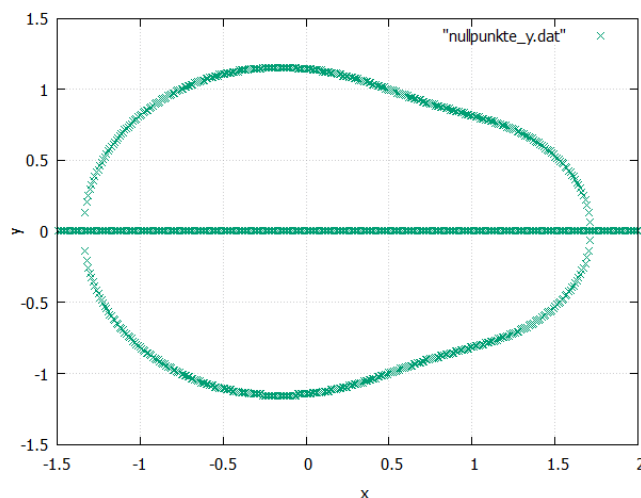
```

do xzaehl=1,350
x=-1.5+3.5/350.0*real(xzaehl)
y=-1.5
fsy=-gam*ms*msat*y/((x+rs)**2+y**2)**1.5
fey=-gam*me*msat*y/((x-re)**2+y**2)**1.5
fzy=msat*ve2/re**2*y
fgesyalt=fsy+fey+fzy

do yzaehl=1,300
y=-1.5+3.0/300.0*real(yzaehl)
fsy=-gam*ms*msat*y/((x+rs)**2+y**2)**1.5
fey=-gam*me*msat*y/((x-re)**2+y**2)**1.5
fzy=msat*ve2/re**2*y
fgesy=fsy+fey+fzy
if ((fgesyalt.le.0.0).and.(fgesy.ge.0.0)) write(11,*) x,y-0.005
if ((fgesyalt.ge.0.0).and.(fgesy.le.0.0)) write(11,*) x,y-0.005
fgesyalt=fgesy
enddo
enddo
close(unit=11)
end program lagrangey

```

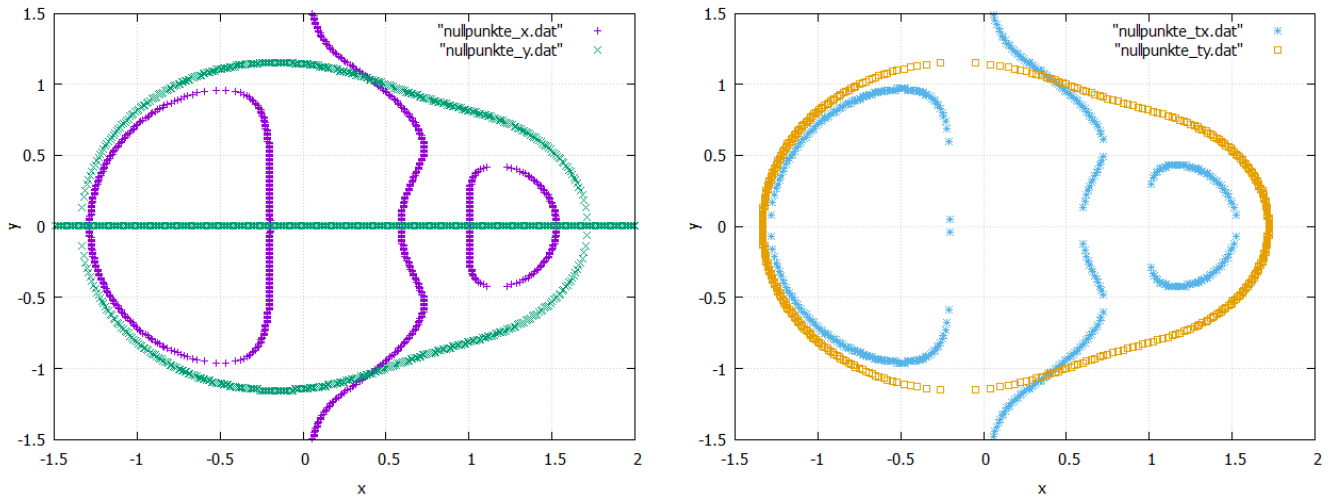
Diese Punkte ergeben als Konturlinien:



Nulldurchgänge von $F_{ges,y}$

Lagrangepunkte liegen dort, wo sowohl $F_{ges,x}$ als auch $F_{ges,y}$ Null ist, daher auf der nächsten Seite beide Punktlisten in einem Diagramm: Deutlich erkennt man nun die Lagrangepunkte L_4 und L_5 . Tatsächlich sind auf zwei Nachkommastellen gerundet in beiden .dat-Dateien die Punkte $L_4(0.4|1.04)$ und $L_5(0.4|-1.04)$ zu finden. Die Lagrangepunkte $L_1(0.59|0)$, $L_2(1.53|0)$ und $L_3(-1.28|0)$ sind ebenfalls noch mit Nachsehen in nullpunkte_x.dat genau zu identifizieren. nullpunkte_y.dat ist hier keine große Hilfe; wenn man für jedes x $F_{ges,y}$ entlang einer Linie parallel zur y-Achse durchlaufen lässt, wechselt dieses natürlich bei $y = 0$ das Vorzeichen, weil die y-Komponente der Gravitationskräfte Richtung Sonne und Erde sich umkehrt. Ebenso sind die senkrechten Linienteile bei $x = -0.2$ und $x = 1.0$ aus $F_{ges,x}$ zu erklären. Auf der anderen Seite der Sonne bzw. der Erde zeigt die Anziehungskraft andersherum, wechselt also entlang der x-Richtung ihr Vorzeichen. $(-0.2|0)$ und $(1.0|0)$ sind klar keine Lagrangepunkte, sondern die

Positionen von Sonne und Erde, Polstellen in der Potentialfunktion und können, je nachdem, in welcher Koordinatenrichtung man sich bewegt, in den Funktionen der Kräftekomponenten Polstellen mit Vorzeichenwechsel sein.



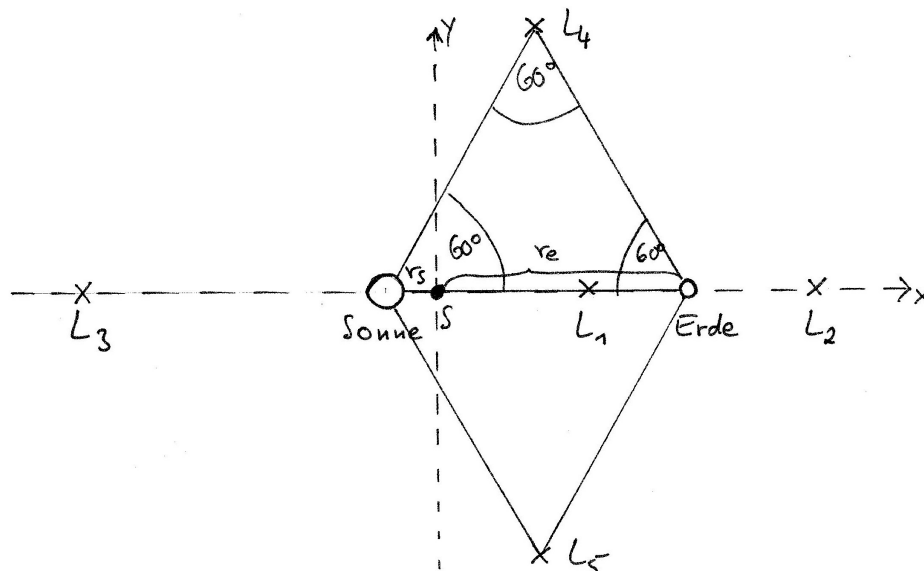
Nulldurchgänge von $F_{ges,x}$ und $F_{ges,y}$ zusammen und rechts x- und y-Schleifen vertauscht

Es spricht prinzipiell nichts dagegen, in den beiden Suchprogrammen die x- und y-Schleifen zu vertauschen. Dann kommen allerdings die Lagrangepunkte auf der x-Achse nicht heraus (siehe rechtes Bild), da $F_{ges,y}$ entlang der gesamten x-Achse Null ist, bei Änderungen von x mit $y = 0$ also keine Vorzeichenwechsel gefunden werden.

Wer auch mit den realen Werte für Sonne und Erde Potentiallandschaften zeichnen möchte und Konturlinien von Kräftegleichgewichten auswerten, dem wünsche ich viel Erfolg und Geduld.

Trigonometrische Lösung

Schon in einfachsten Internetbeiträgen über die Lagrangepunkte ⁴ steht, dass sich L_4 und L_5 einfacher finden lassen als durch aufwändige numerische Rechnungen. Sonne, Erde und L_4 bzw. Sonne, Erde und L_5 bilden jeweils ein gleichseitiges Dreieck.



L_4 und L_5 als Spitzen gleichseitiger Dreiecke

⁴<https://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte>

Was hat diese simple Trigonometrie mit Kräften zu tun, die umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat oder quadratisch mit der Bahngeschwindigkeit gehen? Ich möchte im Folgenden durch Einsetzen beweisen, dass die Koordinaten der Spitzen von gleichseitigen Dreiecken, errichtet auf der Verbindung Sonne-Erde, die Bedingungen für das Kräftegleichgewicht erfüllen.

Vorbereitend wird der Ausdruck für v_e^2 in $F_{z,x}$ und $F_{z,y}$ noch eingesetzt:

$$F_{z,x} = \frac{m_{sat} \cdot v_e^2}{r_e^2} \cdot x = \frac{m_{sat} \cdot x}{r_e^2} \cdot \gamma \cdot \frac{m_s \cdot r_e}{(r_e + r_s)^2} = \frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot x}{r_e \cdot (r_e + r_s)^2}, \quad F_{z,y} = \frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot y}{r_e \cdot (r_e + r_s)^2}$$

Wenn $(x|y)$ der Punkt L_4 ist, der mit der Sonne $(-r_s|0)$ und der Erde $(r_e|0)$ ein gleichseitiges Dreieck bildet, ist $x = \frac{r_e - r_s}{2}$ und $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (r_e + r_s)$. In die drei Kräfte in x-Richtung

$$F_{s,x} = -\frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot (x + r_s)}{((x + r_s)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{e,x} = \frac{\gamma \cdot m_e \cdot m_{sat} \cdot (r_e - x)}{((r_e - x)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{z,x} = \frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot x}{r_e \cdot (r_e + r_s)^2}$$

eingesetzt ergibt das (den gemeinsamen Faktor $\gamma \cdot m_{sat}$ dividieren wir gleich heraus):

$$\begin{aligned} \frac{F_{s,x,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= -\frac{m_s \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot ((r_e + r_s)^2/4 + 3(r_e + r_s)^2/4)^{3/2}} = -\frac{m_s \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot (r_e + r_s)^3} = -\frac{m_s}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} \\ \frac{F_{e,x,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= \frac{m_e \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot ((r_e + r_s)^2/4 + 3(r_e + r_s)^2/4)^{3/2}} = \frac{m_e \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot (r_e + r_s)^3} = \frac{m_e}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} \\ \frac{F_{z,x,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= \frac{m_s \cdot (r_e - r_s)}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)^2} \end{aligned}$$

Es wird nun gezeigt, dass die Summe dieser drei Null ergibt, wobei die Schwerpunktbedingung $m_s \cdot r_s = m_e \cdot r_e$ einfließt.

$$-\frac{m_s}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} + \frac{m_e}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} + \frac{m_s \cdot (r_e - r_s)}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)^2} = \frac{-m_s \cdot r_e + m_e \cdot r_e + m_s \cdot r_e - m_s \cdot r_s}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)^2} = 0$$

Und in die drei Kräfte in y-Richtung

$$F_{s,y} = -\frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot y}{((x + r_s)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{e,y} = -\frac{\gamma \cdot m_e \cdot m_{sat} \cdot y}{((r_e - x)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad F_{z,y} = \frac{\gamma \cdot m_s \cdot m_{sat} \cdot y}{r_e \cdot (r_e + r_s)^2}$$

ebenfalls Einsetzen der speziellen Werte von L_4 für x und y liefert:

$$\begin{aligned} \frac{F_{s,y,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= -\frac{m_s \cdot \sqrt{3} \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot (r_e + r_s)^3} = -\frac{\sqrt{3} \cdot m_s}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} \\ \frac{F_{e,y,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= -\frac{m_e \cdot \sqrt{3} \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot (r_e + r_s)^3} = -\frac{\sqrt{3} \cdot m_e}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} \\ \frac{F_{z,y,4}}{\gamma \cdot m_{sat}} &= \frac{m_s \cdot \sqrt{3} \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot m_s}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)} \end{aligned}$$

und alle drei zusammengezählt:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3} \cdot m_s}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} - \frac{\sqrt{3} \cdot m_e}{2 \cdot (r_e + r_s)^2} + \frac{\sqrt{3} \cdot m_s}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)} &= \frac{-\sqrt{3} \cdot m_s \cdot r_e - \sqrt{3} \cdot m_e \cdot r_e + \sqrt{3} \cdot m_s \cdot (r_e + r_s)}{2 \cdot r_e \cdot (r_e + r_s)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-m_s \cdot r_e - m_e \cdot r_e + m_s \cdot r_e + m_s \cdot r_s}{r_e \cdot (r_e + r_s)^2} = 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

In dem Beispiel mit den handlichen Zahlen sind nach der exakten trigonometrischen Rechnung

$$x = \frac{1.0 - 0.2}{2} = 0.4 \text{ und } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1.0 + (-0.2)) = 1.04, \text{ also } L_4(0.4|1.04) \text{ und } L_5(0.4|-1.04).$$