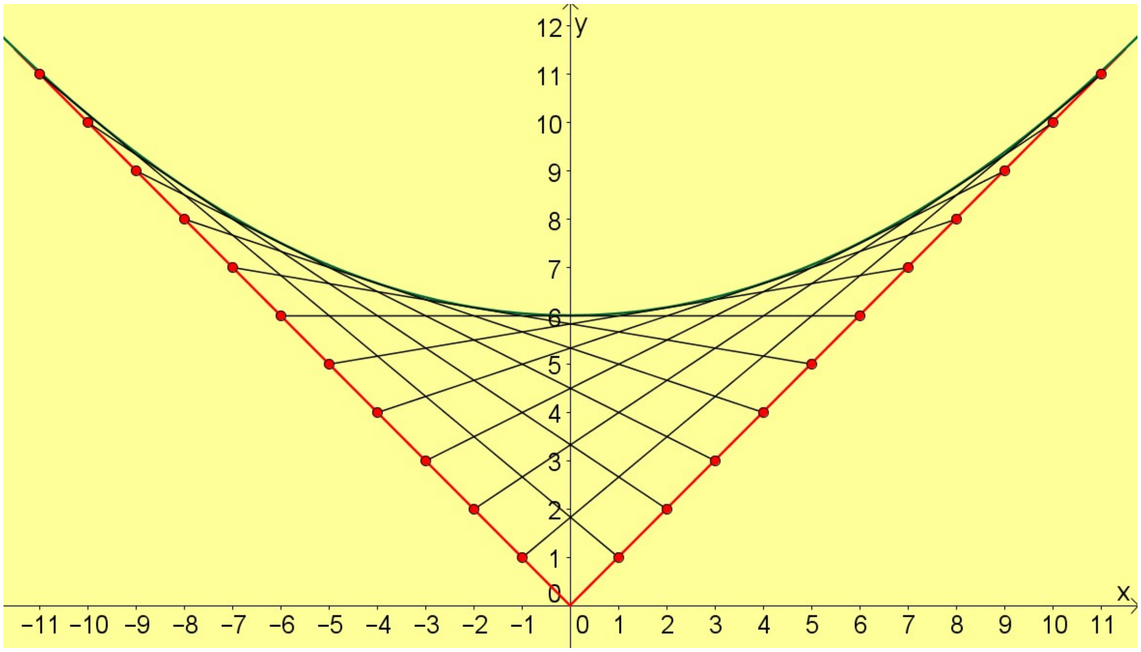
Eine Parabel aus Fadengraphik



Im Lehrbuch Lambacher/Schweizer Mathematik Eingangsklasse Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg, Ausgabe von 2015, findet sich auf Seite 69 auf einer Exkursion zum Thema Parabeln sinngemäß auch folgende einfache Anleitung bzw. Aufgabe:
Markieren Sie auf den Winkelhalbierenden vom Ursprung aus in gleichmäßigen Abständen jeweils 11 Punkte. Verbinden Sie den ersten Punkt links mit dem letzten rechts, den zweiten Punkt links mit dem vorletzten rechts, usw. Die Hüllkurve dieser Verbindungslinien ergibt eine Parabel. Aber warum eigentlich? Einen Beweis enthält bzw. verlangt das Lehrbuch nicht. Deshalb möchte ich mich hier darum kümmern.

Es müssen nicht die Winkelhalbierenden sein. Ein anderes Paar Geraden symmetrisch zur y-Achse tut es auch. Die Punkte müssen nicht auf ganzzahligen Koordinaten liegen, nur in gleichmäßigen Abständen vom Ursprung aus. Es müssen nicht 11 und nicht einmal ungerade viele Punkte pro Seite sein. Ganzzahlige Koordinaten und ungerade viele Punkte pro Seite machen das Zeichnen oder sogar mit Fäden Realisieren sowie auch das Verständnis des Beweises allerdings einfacher.

Sei n um eins größer als die Anzahl der Punkte pro Seite und a bzw. $-a$ die Steigung der Halbgeraden. t zählt die Punkte durch, also $t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Wir verbinden den Punkt $(t|at)$ mit dem Punkt $(-(n-t)|-a\cdot(-(n-t))) = (t-n|an-at)$ und stellen die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte auf. Die Steigung beträgt

$$m = \frac{an-at-at}{t-n-t} = \frac{a\cdot(2t-n)}{n}$$

Die Gerade $y = mx + b$ muss durch den Punkt $(t|at)$ verlaufen, daraus gewinnen wir b.

$$at = \frac{a\cdot(2t-n)}{n}\cdot t + b \quad\Rightarrow\quad b = \frac{ant-2at^2+ant}{n} = \frac{2a(nt-t^2)}{n}$$

Die Geradengleichung lautet also

$$y = \frac{a\cdot(2t-n)}{n}\cdot x + \frac{2a(nt-t^2)}{n}$$

Die Parabel hat die Gleichung $f(x) = k \cdot x^2 + an/2$. Die Gerade muss für jedes t Tangente an die Parabel sein, es darf also nur einen gemeinsamen Punkt geben. Gleichsetzen führt auf:

$$\begin{aligned}
&kx^2 + \frac{an}{2} = \frac{a \cdot (2t-n)}{n} \cdot x + \frac{2a(nt-t^2)}{n} \\
&kx^2 - \frac{a \cdot (2t-n)}{n} \cdot x - \frac{4a(nt-t^2) - an^2}{2n} = 0 \\
&2nkx^2 - 2a(2t-n) \cdot x - (4a(nt-t^2) - an^2) = 0 \\
&x_{1,2} = \frac{2a(2t-n) \pm \sqrt{4a^2(2t-n)^2 + 8nk(4a(nt-t^2) - an^2)}}{4nk}
\end{aligned}$$

Damit es genau eine Lösung gibt, muss die Wurzel bzw. der Radikand Null sein.

$$\begin{aligned}
4a^2(2t-n)^2 + 8nka(4(nt-t^2) - n^2) &= 0 \qquad | : (4a) \\
a(2t-n)^2 + 2nk(4(nt-t^2) - n^2) &= 0 \\
4at^2 - 4atn + an^2 + 8n^2kt - 8nkt^2 - 2kn^3 &= 0
\end{aligned}$$

k muss von t unabhängig sein, damit für alle t dasselbe k herauskommt.
Deshalb müssen sich für die Potenzen von t die Terme jeweils gesondert wegheben.

$$4at^2 - 8nkt^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4atn + 8n^2kt = 0 \qquad \text{und} \qquad an^2 - 2kn^3 = 0$$

Alle drei Gleichungen führen auf das Ergebnis $k = a/(2n)$. Mit der Wahl von a und n erhalten wir also die Fadengraphiktangenten an die Parabel $f(x) = \frac{a}{2n}\,x^2 + \frac{an}{2}$.

In der eingangs gezeigten Graphik ist $n = 12$ und $a = 1$.

Wir erhalten also die Parabel $f(x) = \frac{1}{2 \cdot 12}\,x^2 + \frac{1 \cdot 12}{2} = \frac{1}{24}\,x^2 + 6$

Wo berührt die Linie von einem Punkt $(t|at)$ zum Punkt $(t-n|a(n-t))$ auf den roten Linien die Parabel als Tangente? Um dies zu ermitteln, setzen wir die Steigungen (Ableitungen) gleich:

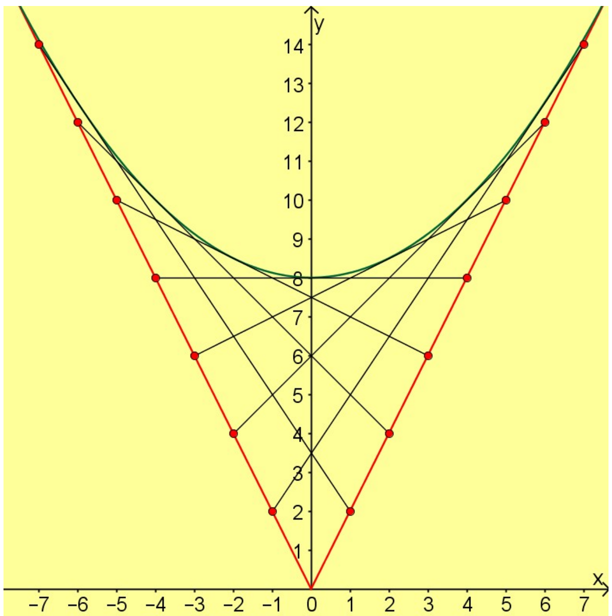
$$\frac{a \cdot (2t-n)}{n} = 2 \cdot k \cdot x = \frac{a}{n} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = 2t - n$$

Der Funktionswert dazu lautet

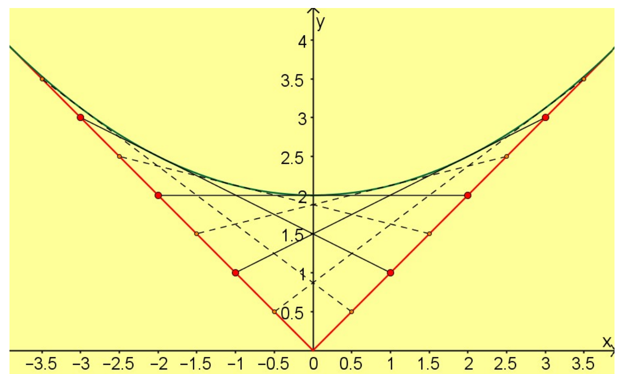
$$f(2t-n) = \frac{a}{2n} \cdot (2t-n)^2 + \frac{an}{2} = \frac{a \cdot (4t^2 - 4tn + n^2) + an^2}{2n} = \frac{a \cdot (2t^2 - 2tn + n^2)}{n}$$

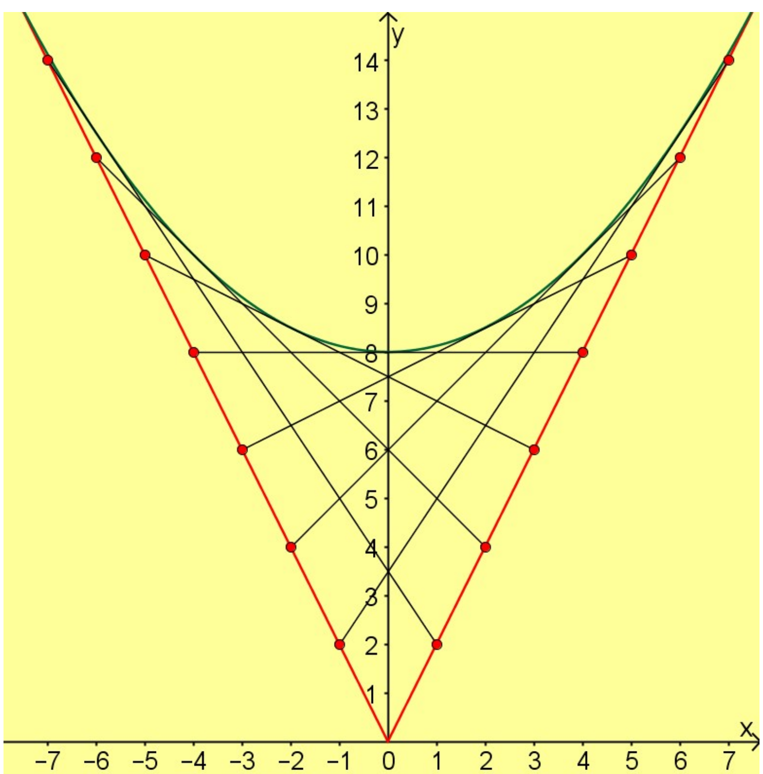
Der Ansatz für die Punkte auf den roten Linien und somit die Geradengleichungen gelten wie notiert nur für positive t. (Die anderen Tangenten mit ihren Berührpunkten sind dann einfach an der y-Achse gespiegelt.) Z.B. erhalten wir für $t = 3$, also die Verbindung von (3|3) nach (-9|9), den Berührpunkt an die Parabel $(2 \cdot 3 - 12|1 \cdot (2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 + 12^2)/12) = (-6|7.5)$.

Es sieht so aus, als würden wir mit der Fadengraphikmethode nur sehr breite, flache Parabeln erhalten. Und in der Tat sind diese günstiger so zu konstruieren. Um schmalere Parabeln zu erhalten, muss das Verhältnis $a : n$ vergrößert werden. Das vergrößert auch die Höhe des Scheitelpunkts, so dass wir unten eine Menge Platz für gespannte Fäden brauchen, ehe darüber die Parabel überhaupt anfängt. Im folgenden Beispiel links sind $a = 2$ und $n = 8$ gewählt, so dass der Koeffizient vor x^2 immerhin $a/(2n) = 2/(2 \cdot 8) = 1/8$ wird. Der Scheitelpunkt liegt auf Höhe $an/2 = 2 \cdot 8/2 = 8$. Wollen wir bei einem moderaten a bleiben, muss n recht klein bleiben, was die Fäden ausdünnt und die Fadengraphik als Hüllkurve eventuell zu eckig macht. Im rechten Bild ist gezeigt, dass wir auch mit $a = 1$ und $n = 4$ den Vorfaktor $1/8$ vor x^2 erhalten. Der Scheitelpunkt liegt mit $(0|2)$ recht niedrig. Das Problem mit zu wenig Fäden von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten kann, wie zu Anfang erwähnt, gelöst werden, indem wir auch von Zwischenpunkten z.B. mit halbzahligen Koordinaten Fäden ziehen (gestrichelt).

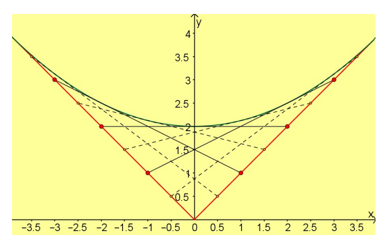


Allerdings erhält man z.B. mit $a = 1$ und Fäden bis zu einem relativ kleinen n wie hier rechts 4 nur einen kleinen Ausschnitt um den Scheitelpunkt der Parabel, der aufgrund des Bereichs dann wiederum sehr flach aussieht.





Hier sind dieselben beiden Bilder nochmals in einem Größenverhältnis abgedruckt, das veranschaulicht, welchen Ausschnitt der linken Parabel die rechte darstellt.



Und jetzt wünsche ich dem Leser viel Spaß mit Fadengraphikparabeln, sei es real mit Fäden un Pflöcken oder virtuell mit einem Graphikprogramm.