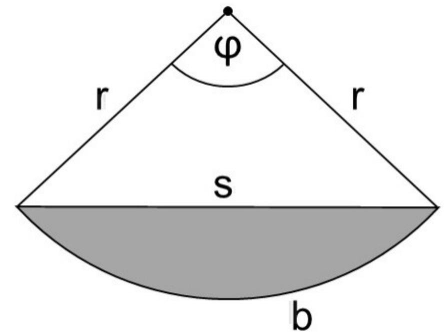
Näherungsformel für die Segmentfläche

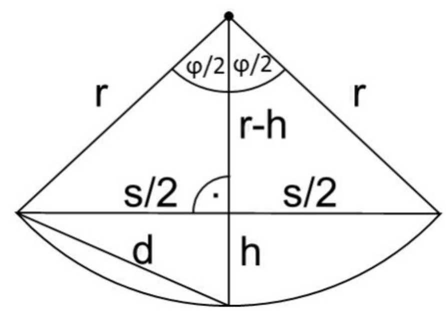
In Schulbüchern[1] findet man die Näherungsformel für die Fläche eines Kreissegments:

$$A_{SG} = \frac{2}{3}\,sh + \frac{h^3}{2s}$$



Sie verwendet nur die Sehnenlänge und die Höhe des Segments, also nur Längen, die man messen kann, auch wenn man das Segment allein hat. Man muss nicht einmal den zugehörigen Kreismittelpunkt gegebenenfalls durch Konstruktion finden und den Radius messen oder ausrechnen. Und man muss auch keinen Winkel ermitteln. Deshalb bleibt es eine Nährungsformel. Aber wie lässt sie sich herleiten und warum ist sie so gut?

In einem älteren Mathematiklexikon[2] habe ich zwar nicht die Segmentnäherungsformel oder deren Herleitung, aber eine entscheidende Zutat gefunden. Es handelt sich um eine gute Näherungsformel für die Bogenlänge eines Sektors. Die Bogenlänge wird hier ebenfalls nur durch gerade Strecken ausgedrückt, nämlich durch die Sehnenlänge des Sektors sowie die Sehnenlänge des halben Sektors.



$$b \approx \frac{8d - s}{3}$$

Dazu, wieso diese Näherung so gut ist, später. Für den Moment wollen wir sie verwenden.

Die Segmentfäche ist exakt (die Sektorfläche minus die Dreiecksfläche):

$$A_{SG} = \frac{1}{2}\,br - \frac{1}{2}\,r^2 \sin\varphi$$

Der Winkel φ ist im Bogenmaß zu nehmen.

Es folgen einige einfache Hilfsüberlegungen, um alles durch s und h auszudrücken.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s/2}{r} = \frac{s}{2r} \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{r-h}{r} \qquad \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{s(r-h)}{r^2}$$

$$d^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \qquad d = \sqrt{\frac{4h^2+s^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2+s^2}}{2}$$

$$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \qquad r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{s^2}{4} \qquad 2rh = \frac{4h^2+s^2}{4} \qquad r = \frac{4h^2+s^2}{8h}$$

[1] z.B. Frommenwiler/Studer, Mathematik für Mittelschulen Geometrie, Sauerländer Verlage 2008
[2] Kleine Enzyklopädie Mathematik, 1965, VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Inclusive b, setzen wir dies nach und nach in A_{SG} ein.

$$\begin{aligned} A_{SG} &= \frac{1}{2}\,br - \frac{1}{2}\,r^2 \sin\varphi \\ &\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{8d-s}{3}\cdot r - \frac{1}{2}\,r^2\cdot\frac{s(r-h)}{r^2} \\ &= \frac{4}{3}\,dr - \frac{1}{6}\,sr - \frac{1}{2}\,sr + \frac{1}{2}\,sh = \frac{4}{3}\,dr - \frac{2}{3}\,sr + \frac{1}{2}\,sh \\ &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{4h^2+s^2}}{2}\cdot\frac{4h^2+s^2}{8h} - \frac{2}{3}\,s\cdot\frac{4h^2+s^2}{8h} + \frac{1}{2}\,sh \\ &= \frac{(4h^2+s^2)^{3/2}}{12h} - \frac{1}{3}\,sh - \frac{1}{12}\cdot\frac{s^3}{h} + \frac{1}{2}\,sh \end{aligned}$$

Der zweite und vierte Term können schon zusammengefasst werden.
Im ersten Term wird die dritte Potenz der Wurzel unter der Annahme $4h^2 \ll s^2$ entwickelt.

Für eine Taylorentwicklung nehmen wir $f(x) = (1+x)^{3/2}$.
$f'(x) = \frac{3}{2}\,(1+x)^{1/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}\,(1+x)^{-1/2}$. $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}\,f''(0)\cdot x^2 + \ldots$
Die Taylorentwicklung von $(1+x)^{3/2}$ beginnt also mit $1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2$.

$$\begin{aligned} A_{SG} &\approx \frac{s^3}{12h}\cdot\left(1+\frac{4h^2}{s^2}\right)^{3/2} + \frac{1}{6}\,sh - \frac{1}{12}\cdot\frac{s^3}{h} \\ &\approx \frac{s^3}{12h}\cdot\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{4h^2}{s^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{16h^4}{s^4}\right) + \frac{1}{6}\,sh - \frac{1}{12}\cdot\frac{s^3}{h} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{s^3}{h} + \frac{1}{2}\,sh + \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{s} + \frac{1}{6}\,sh - \frac{1}{12}\cdot\frac{s^3}{h} = \frac{2}{3}\,sh + \frac{h^3}{2s} \end{aligned}$$

Das ist die anfangs genannte Näherungsformel (q.e.d.).

Anmerkung: Wenn man im ersten Term nur die Wurzel aus $\frac{\sqrt{4h^2+s^2}}{2}$ entwickelt, selbst bis zur zweiten Ordnung, und den anderen Faktor $\frac{4h^2+s^2}{8h}$ so stehen lässt, erreicht man beim Ausmultiplizieren nicht den gewünschten Vorfaktor $\frac{1}{2}$ für den Term mit $\frac{h^3}{s}$.

Gegenfrage

Der Sinus des Zentriwinkels ist einfach durch Verhältnisse gerader Strecken auszudrücken, der Zentriwinkel selber, der in der Bogenlänge bzw. der Sektorfläche steckt, nicht.
Wenn jedoch sowieso eine Taylorentwicklung gebraucht wird, ist dann die Nährungsformel für die Bogenlänge überhaupt nötig? Kann man nicht gleich die Entwicklung der arcsin-Funktion nehmen?

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s/2}{r}$ also $\varphi = 2\arcsin\frac{s/2}{r}$, Reihenentwicklung $\arcsin x = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{40}\,x^5 + \ldots$

$$\begin{aligned}
A_{SG} &= \frac{1}{2}\varphi r^2 - \frac{1}{2}\,r^2\sin\varphi \\
&= \frac{1}{2}\,r^2\cdot 2\arcsin\frac{s/2}{r} - \frac{1}{2}\,r^2\cdot\frac{s(r-h)}{r^2} \\
&\approx r^2\left(\frac{s/2}{r}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(s/2)^3}{r^3}+\frac{3}{40}\cdot\frac{(s/2)^5}{r^5}\right)-\frac{1}{2}\,sr+\frac{1}{2}sh \\
&= \frac{1}{2}\,sr+\frac{1}{48}\cdot\frac{s^3}{r}+\frac{3}{1280}\cdot\frac{s^5}{r^3}-\frac{1}{2}\,sr+\frac{1}{2}sh \\
&= \frac{s^3}{48}\cdot\frac{8h}{4h^2+s^2}+\frac{3s^5}{1280}\cdot\frac{(8h)^3}{(4h^2+s^2)^3}+\frac{1}{2}\,sh \\
&= \frac{s^3h}{6(4h^2+s^2)}+\frac{6s^5h^3}{5(4h^2+s^2)^3}+\frac{sh}{2}
\end{aligned}$$

Auch in dieser Formel kommen nur s und h vor, allerdings sehr umständlich in Summen im Nenner. Das ist kaum eine einfache Näherungsformel. Also gilt es auch hier zu entwickeln.

$f(x) = \dfrac{1}{1+x} \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$

$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{1}{2!}\,f''(0)\cdot x^2 + \ldots = 1 - x + x^2 + \ldots$

$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3} \qquad f'(x) = -\dfrac{3}{(1+x)^4}$

$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \ldots = 1 - 3x + \ldots$

$$\begin{aligned}
A_{SG} &\approx \frac{s^3h}{6s^2\left(1+\frac{4h^2}{s^2}\right)}+\frac{6s^5h^3}{5s^6\left(1+\frac{4h^2}{s^2}\right)^3}+\frac{sh}{2} \\
&\approx \frac{sh}{6}\left(1-\frac{4h^2}{s^2}+\frac{16h^4}{s^4}\right)+\frac{6h^3}{5s}\left(1-3\cdot\frac{4h^2}{s^2}\right)+\frac{sh}{2} \\
&= \frac{sh}{6}-\frac{2h^3}{3s}+\frac{8h^5}{3s^3}+\frac{6h^3}{5s}-\frac{72h^5}{5s^3}+\frac{sh}{2}\approx\frac{2}{3}\,sh+\frac{8}{15}\cdot\frac{h^3}{s}
\end{aligned}$$

Bis zur Ordnung h^3 im Ergebnis hätte eine Ordnung weniger in den Entwicklungen Bruchfunktionen auch gereicht.

Der führende Term $\frac{2}{3}\,sh$ kommt richtig heraus. Der Vorfaktor des anderen Terms $\frac{8}{15}$ ist nicht sehr anders, aber nicht genau der Faktor $\frac{1}{2}$ der im Schulbuch gefundenen Näherungsformel.

Güte der Näherung

Die Annahme $h \ll s$ ist nur für kleine Zentriwinkel φ gut. Wie gut bleibt die Näherungsformel also für $\varphi \to \pi$ (180°) ? Im folgenden Diagramm ist sie zusammen mit der exakten Formel sowie auch der Näherung aus der arcsin-Entwicklung aufgetragen. Das zweite Diagramm zeigt die Abweichungen.

Wir setzen $r = 1$ und dann ist $s = 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$ und $h = 1 - \cos\frac{\varphi}{2}$.
Die exakte Formel lautet mit $r = 1$

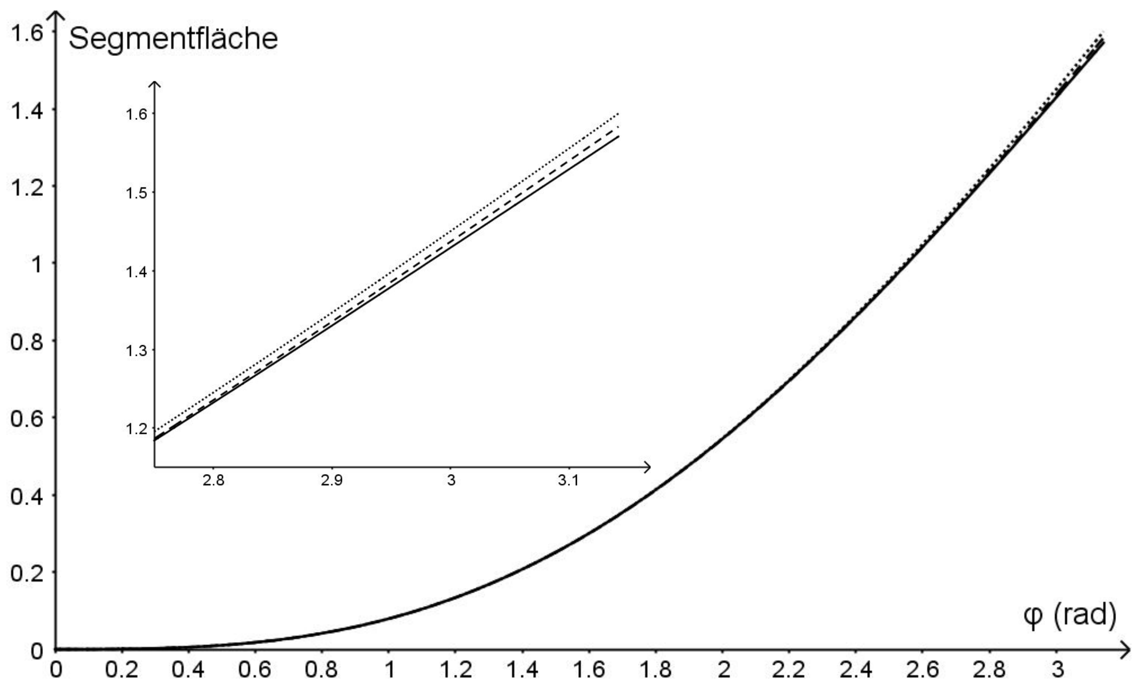
$$A_{SG} = \frac{1}{2}\,\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$$

Die Näherungsformel wird dann zu

$$A_{SG} = \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3}{4\,\sin\frac{\varphi}{2}}$$

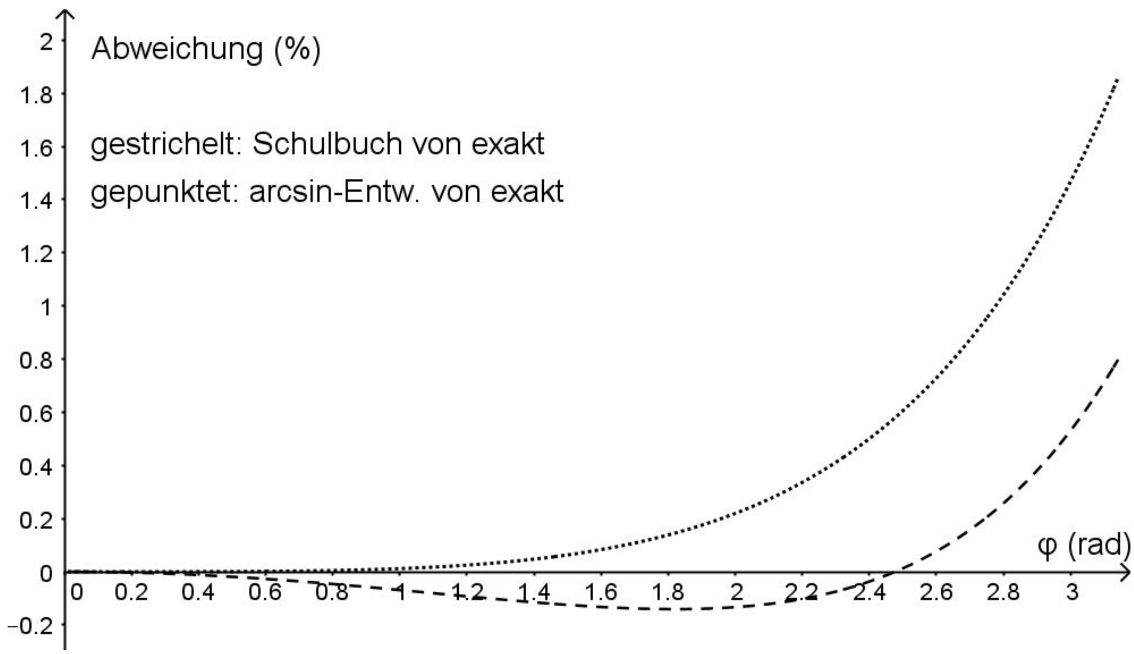
Und unsere Näherung aus der arctan-Entwickung zu

$$A_{SG} = \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3}{15\,\sin\frac{\varphi}{2}}$$



durchgezogen: exakt, gestrichelt: Schulbuchformel, gepunktet: arcsin-Entwicklung

Die Näherungsformeln sind nicht schlecht, man muss reinzoomen, um den Unterschied zu sehen. Die Schulbuchformel ist sogar noch etwas besser. Wie zu erwarten gibt es die größte Abweichung für $\varphi = \pi$, die Schulbuchformel weicht dort um 0.8% ab, die arcsin-Entwicklung um 1.9%, erstere ist also tatsächlich besser.
Interessanterweise startet die Abweichung der Schulbuchformel mit einer Abweichung nach unten, größtes Defizit -0.14% bei $\varphi = 0.579\,\pi$. Die Formel ist bei $\varphi = 0.788\,\pi$ exakt und gibt erst ab dort leicht zu große Werte.



Sektor statt Segment

Die hineingesteckten Näherungen beziehen sich nur auf den Sektorteil. Inwiefern spielt es eine Rolle, dass es sich um eine Näherungsformel für das Segment handelt, wo noch das Dreieck abgezogen wird? Die Segmentformel hat noch die Eleganz, dass der Term mit s^3/h wegfällt, so dass die Formel letztlich nur aus zwei Teilen besteht. Das ist beim Sektor allein nicht der Fall. Sonst lässt sich die Näherung für die Bogenlänge genauso in eine Formel für die Sektorfläche einarbeiten. Das Ergebnis ist

$$A_{SK} = \frac{1}{16} \cdot \frac{s^3}{h} + \frac{5}{12}\, sh + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{s}$$

und das Ergebnis mit der Entwicklung des arcsin ergibt

$$A_{SK} = \frac{1}{16} \cdot \frac{s^3}{h} + \frac{5}{12}\, sh + \frac{8}{15} \cdot \frac{h^3}{s}$$

Die größten Abweichungen vom exakten Ergebnis $A_{SK} = \dfrac{1}{2}\varphi r^2$ sind ebenfalls für $\varphi = \pi$ 0.8% für die Formel, die die Bogenlänge gebraucht, und 1.9% für die Formel aus der arcsin-Entwicklung.

Näherungsformel für die Bogenlänge

Jetzt endlich zu der gefundenen Näherungsformel für die Bogenlänge.
Zunächst die Begründung, wie sie in der Mathematik-Enzyklopädie gegeben ist.

Es ist $s = 2r\sin\dfrac{\varphi}{2}$ und $d = 2r\sin\dfrac{\varphi}{4}$, also $\dfrac{8d - s}{3} = \dfrac{2r}{3}\left(8\sin\dfrac{\varphi}{4} - \sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

Die Sinusfunktion wird entwickelt, allerdings wird dem Abbruch der Entwicklung dadurch Rechnung getragen, dass das dritte Glied einen Korrekturfaktor erhält. Der neu eingeführte Faktor ϑ zwischen 0 und 1 hierin kann so gewählt werden, dass die Darstellung exakt bleibt (Taylorscher Satz, Restform von Lagrange).

$$\frac{2r}{3}\left(8\sin\frac{\varphi}{4}-\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$
$$\frac{16r}{3}\left(\varphi/4-\frac{(\varphi/4)^3}{3!}+\frac{(\varphi/4)^5}{5!}\cos\frac{\vartheta\varphi}{4}\right)-\frac{2r}{3}\left(\varphi/2-\frac{(\varphi/2)^3}{3!}+\frac{(\varphi/2)^5}{5!}\cos\frac{\vartheta\varphi}{2}\right)=$$
$$\frac{4}{3}r\varphi-\frac{1}{72}r\varphi^3+\frac{1}{23040}r\varphi^5\cos\frac{\vartheta\varphi}{4}-\frac{1}{3}r\varphi+\frac{1}{72}r\varphi^3-\frac{1}{5760}r\varphi^5\cos\frac{\vartheta\varphi}{2}=$$
$$r\varphi-\frac{1}{5760}r\varphi^5\left(\cos\frac{\vartheta\varphi}{2}-\frac{1}{4}\cos\frac{\vartheta\varphi}{4}\right)$$

Der erste Term ist die gesuchte Bogenlänge b und der restliche dagegen offensichtlich sehr klein. Die Beiträge mit φ^3 haben sich herausgehoben. Die Klammer kann als eine Funktion $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$ mit einem neuen Winkel x aufgefasst werden. Diese Funktion hat für x von 0 bis π nur ein betragsmäßiges Maximum, und zwar bei $x = 0$, wo sie 0.75 beträgt. Mit $\varphi = \pi$ kann man damit eine obere Abschätzung für den Fehler der Bogenlänge geben (für $r = 1$ oder eben prozentual). Über das Vorzeichen des Fehlers ist so direkt allerdings noch nichts gesagt, da $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$ zwischen 0 und π das Vorzeichen wechselt, was also subtiler von ϑ und φ abhängt, hier aber nicht weiter verfolgt werden soll.

Wie kommt man auf so eine Näherungsformel?

Hier der Versuch einer nachträglichen Motivation.
Sagen wir, wir möchten nicht die Bogenlänge darstellen, sondern die "Diagonale" d. Ihre Länge liegt sicherlich zwischen der halben Bogenlänge und der halben Länge der Sehne s. Mit welchen Gewichtungen dieser beiden können wir d möglichst gut darstellen? Und betrachten wir der Einfachheit halber das Doppelte $2d$, dann lässt sich der Ansatz mit der Bogenlänge b und der Sehne s einfacher notieren. Die gute Schätzung ist

$$2d \approx \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}s$$

Stellen wir die Bogenlänge wieder mit dem Zentriwinkel dar, und die Sehnen auch, mit dem Sinus. Dann steht da

$$4r\sin\frac{\varphi}{4} \approx \frac{3}{4}r\varphi + \frac{1}{2}r\sin\frac{\varphi}{2}$$

Lassen wir den Faktor r weg und entwickeln die Sinusfunktionen.

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{\varphi}{4}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{\varphi^3}{4^3}+\dots\right) &\approx \frac{3}{4}\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{\varphi^3}{2^3}+\dots\right)\\ \varphi-\frac{1}{96}\varphi^3+\dots &\approx \varphi-\frac{1}{96}\varphi^3+\dots \end{aligned}$$

Mit der Gewichtung drei Viertel zu ein Viertel ergibt sich sogar in der Ordnung φ^3 derselbe Koeffizient. Mit der Gewichtung einhalb zu einhalb hätte das nicht geklappt, wie die folgende Rechnung zum Vergleich zeigen soll.

$$
\begin{aligned}
2d &\approx \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}s \\
4r\sin\frac{\varphi}{4} &\approx \frac{1}{2}\,r\varphi + r\sin\frac{\varphi}{2} \\
4\left(\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\varphi^3}{4^3} + \ldots\right) &\approx \frac{1}{2}\,\varphi + \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\varphi^3}{2^3} + \ldots\right) \\
\varphi - \frac{1}{96}\varphi^3 + \ldots &\approx \varphi - \frac{1}{48}\,\varphi^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Zurück zur Näherungsformel für die Bogenlänge. Umstellen von $2d = \dfrac{3b+s}{4}$ nach b (ich schreibe jetzt das Gleichheitszeichen) ergibt $b = \dfrac{8d-s}{3}$.

Schlussbemerkung

Ein längeres Hin- und Herwälzen hat hoffentlich gezeigt, wie geschickt die Näherungsformeln, für die Bogenlänge und dann für die Segmentfläche, gemacht sind.