Das Zwillingsparadoxon mit Tangens von ein paar Winkeln aufgeklärt

In der Zeitschrift Astronomie und Raumfahrt im Unterricht vom April 2015 ist ein Artikel von Oliver Schwarz und Lenka Bzduskova über das Zwillingsparadoxon erschienen. Gut wird ausgeführt, dass bei Inertialsystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, Zeitdifferenzen in einem System vom anderen aus gesehen verlängert erscheinen. So oberflächlich betrachtet wird das Paradoxon konstruiert, dass bei Zwillingen, von denen einer eine Weltraumfahrt unternimmt und der andere auf der Erde bleibt, bei der Rückkehr des Weltraumfahrers jeder Zwilling meint, dass sein Bruder weniger gealtert sei als er. Und es wird korrekterweise betont, dass es sich hierbei um ein Missverständnis, aber nicht um ein Manko der speziellen Relativitätstheorie handelt. Wie erklärt man jedoch auf in der Schule verwendbarem mathematischen Niveau und geometrisch anschaulich, welcher Zwilling bei der Rückkehr mit Sicherheit der ältere ist? Der Weltraumfahrer ist nachher der jüngere und der auf der Erde gebliebene der ältere Bruder. Die Rollen der Brüder sind eben nicht austauschbar, weil der Weltraumfahrer irgendwann umkehren muss, also seine Geschwindigkeit ändern muss, um zurückzukehren. Man braucht also drei Inertialsysteme, wenn zu jeder Zeit das Ruhesystem jedes Bruders dabei sein soll. Mit nur zwei Systemen und einer Relativgeschwindigkeit kommt man nicht aus.

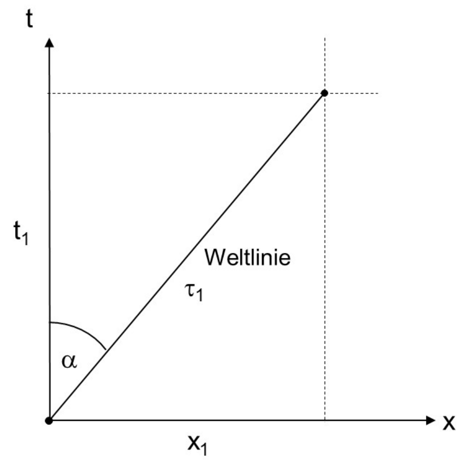
Für den definitiven eindeutigen Altersvergleich ist es notwendig, dass die Brüder von einem Raumzeitpunkt aus starten und an einem Raumzeitpunkt wieder zusammenkommen. (Würden wir irgendwann nach dem Start zwei verschiedene Raumpunkte auf den Weltlinien nehmen wollen, um das Alter der Zwillinge zu vergleichen, käme es auf das Inertialsystem an, in dem wir sie betrachten. Zwei Punkte, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, sind dies in einem anderen nicht, und welches Inertialsystem sollte man dann nehmen? Das ist also keine sinnvolle Frage.)

Zurück zu einem halbwegs geometrischen Ansatz zum richtigen Verständnis des Zwillingsparadoxons. In welchem Inertialsystem wir die Weltlinien der Brüder darstellen, ist egal. Und in dem genannten Artikel sind auch bereits mehrere Möglichkeiten gezeigt: im Ruhesystem des Bruders auf der Erde, im Ruhesystem des Weltraumfahrers auf dem Hinflug, im Ruhesystem des Weltraumfahrers auf dem Rückflug oder in einem System, das zu keiner Zeit Ruhesystem eines Bruders ist. Stets ist die Weltlinie des Bruders auf der Erde eine gerade Linie, während die Weltlinie des Weltraumfahrers aus zwei geraden Teilstücken, Hin- und Rückflug, besteht. Diese beiden Stücke bilden ein Dreieck mit der Linie des Zwillings auf der Erde.

Die gute Idee des Artikels besteht darin, für Schüler jetzt mit Eigenschaften von Dreiecken zu argumentieren. In einem nicht-entarteten Dreieck ist die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte Seite. Die beiden für den Weltraumfahrer gezeichneten Linienstücke sind zusammen also länger als die für den Bruder auf der Erde gezeichnete Linie. Der Zwilling, der die zwei Dreiecksseiten durchläuft, ist aber nachher jünger als der Zwilling, der die verbleibende dritte Dreiecksseite nimmt. Hier kann die einfache Geometrie keine direkte Anschauung liefern. Der genannte Artikel argumentiert jetzt pauschal, dass eine längere Weltlinie eine kürzere Eigenzeit bedeutet. Das ist sicher richtig, aber es kommt für Schüler so, dass sie dann eben dieses Dogma glauben müssen statt dass das mit den Zwillingen ein Paradoxon darstellt.

Ich möchte bei dem einfachen Fall bleiben, dass die Weltlinie des Raumfahrers aus zwei geraden Teilstücken besteht (nicht gekrümmt ist), und die Eigenzeiten für die Dreiecksseiten ausführlicher ausrechnen. Da kommt wieder Trigonometrie und Schulmathematik ins Spiel. Hinzunehmen ist, dass Alterungsprozesse in der jeweiligen Eigenzeit ablaufen, sowie eben der Formelausdruck für diese Eigenzeit. An dieser Stelle wird richtig eingearbeitet, dass bewegte Uhren langsamer gehen. Wir können das Inertialsystem höchstens für eines der drei Weltlinienstücke als Ruhesystem wählen, aber wir können allen Dreiecksseiten ihre Eigenzeiten zuweisen.

Bevor wir das tun, die Grundlagen für meine folgende Darstellung: Die waagerechte Achse ist eine Raumrichtung, die senkrechte Achse ist die Zeit. Obwohl nur mit t bezeichnet, sind alle Zeitwerte als mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert zu denken, oder die Zeit eben in einer Einheit zu nehmen, dass die Setzung $c \equiv 1$ das Schreiben der Rechnungen vereinfacht. Ein Raumschiff folge ein Stück weit mit konstanter Geschwindigkeit einer geraden Weltlinie. Diese Geschwindigkeit ist $v = x_1/t_1$. Hier war t_1 einmalig noch ohne Faktor c gedacht.



Mit der Normierung auf c und geometrisch gilt:

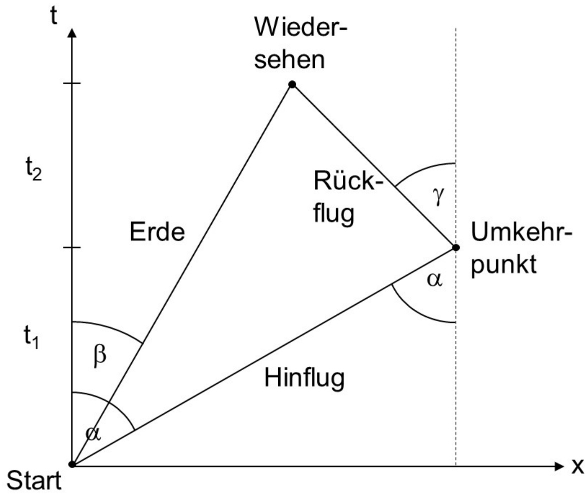
$$\frac{x_1}{c \cdot t_1} = \frac{v}{c} = \tan \alpha$$

Während im gewählten Inertialsystem die Zeit t_1 vergeht, beträgt die Eigenzeit entlang der Weltlinie

$$\tau_1 = t_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_1 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$$

Da es sich um die Bewegung eines Objekts handelt, muss $v/c \leq 1$ sein, d.h. $\alpha \leq 45°$. Alle im Folgenden vorkommenden Winkel zur vertikalen Achse sind höchstens 45°. Hier sind bloß die Zeichnungen nicht immer so gemacht, damit die Dreiecke und deren Beschriftungen nicht so steil gequetscht werden und besser zu sehen sind.

Jetzt sind wir bereit, drei Weltlinienabschnitte, die ein Dreieck bilden, in einem System zu betrachten, einen für den Zwilling auf der Erde und zwei für Hin- und Rückflug des raumfahrenden Zwillings. Für die Situation werden in verschiedenen Inertialsystemen Rechnungen aufgestellt werden, um ganz deutlich zu machen, dass stets die Eigenzeit des Raumfahrers die kleinere ist, und man nicht doch irgendwie geschickt ein anderes System wählen kann, wo das nicht der Fall ist.



1. Ich beginne mit einem allgemeinen Fall, wo das System nie Ruhesystem eines Bruders ist. Alle Weltlinien befinden sich im rechten oberen Quadranten. Die Zeit ist in zwei Abschnitte eingeteilt, t_1 vom Start bis zur Umkehr des Raumfahrers, t_2 von der Umkehr bis zum Wiedersehen.

Die Aussage, dass die Eigenzeit des umkehrenden Bruders kleiner ist als die des anderen, lautet:

$$(t_1 + t_2) \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \beta} \;>\; t_1 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha} + t_2 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \gamma}$$

Und wir brauchen die Bedingung, dass das Dreieck geschlossen ist, wirklich ein Dreieck ist, wir also genau bis zum Wiedertreffen der Brüder rechnen. Sie lautet:

$$\begin{aligned} x_{ges} &= x_1 + x_2 \\ \tan\alpha \cdot t_1 &= \tan\beta \cdot (t_1 + t_2) + \tan\gamma \cdot t_2 \end{aligned}$$

Nach $\tan\beta$ aufgelöst ergibt sich:

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha \cdot t_1 - \tan\gamma \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

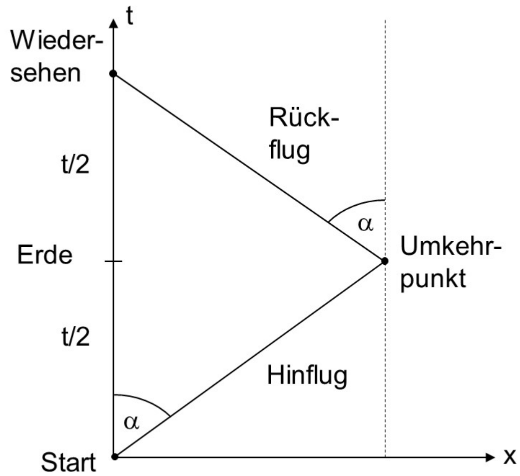
Setzen wir dies in die Eigenzeitbedingung ein, wobei wir links den Faktor $(t_1 + t_2)$ unter die Wurzel ziehen. Weil wir ja beweisen wollen, dass die Ungleichung immer gilt, wird sie nach Einsetzen durch Äquivalenzumformungen in eine triviale Aussage umgeformt. Da alle Beiträge positiv sind, ist Quadrieren kein Problem.

$$\sqrt{(t_1+t_2)^2 - (\tan\alpha \cdot t_1 - \tan\gamma \cdot t_2)^2} \;>\; t_1 \cdot \sqrt{1-\tan^2\alpha} + t_2 \cdot \sqrt{1-\tan^2\gamma}$$

$$t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2 - \tan^2\alpha\, t_1^2 - \tan^2\gamma\, t_2^2 + 2\tan\alpha\, \tan\gamma\, t_1 t_2 \;>$$
$$t_1^2 - \tan^2\alpha\, t_1^2 + t_2^2 - \tan^2\gamma\, t_2^2 + 2t_1t_2\sqrt{1-\tan^2\alpha}\,\sqrt{1-\tan^2\gamma}$$

$$\begin{aligned} 2t_1t_2(1+\tan\alpha\,\tan\gamma) &> 2t_1t_2\sqrt{1-\tan^2\alpha}\,\sqrt{1-\tan^2\gamma} \\ (1+\tan\alpha\,\tan\gamma)^2 &> (1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\gamma) \\ 1 + 2\tan\alpha\,\tan\gamma + \tan^2\alpha\,\tan^2\gamma &> 1 - \tan^2\alpha - \tan^2\gamma + \tan^2\alpha\,\tan^2\gamma \\ \tan^2\alpha + \tan^2\gamma + 2\tan\alpha\,\tan\gamma &> 0 \\ (\tan\alpha + \tan\gamma)^2 &> 0 \end{aligned}$$

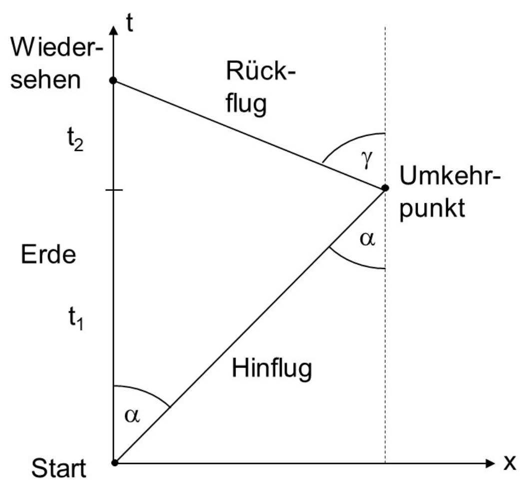
Alle Winkel waren in der Überlegung positiv genommen, zwischen 0° und 45°. Das Gleichheitszeichen wäre nur möglich, wenn α und γ Null wären. Dann wären die beiden Brüder aber sicher zusammen zuhause geblieben.



2. Im zweiten Fall ist das gewählte Inertialsystem das Ruhesystem der Erde. Außerdem ist hier der Fall angenommen, dass der Raumfahrer auf dem Hin- und auf dem Rückweg vom Betrag her dieselbe Geschwindigkeit hat, also die Zeiten für Hin- und Rückflug auch gleich sind.
Die Aussage, dass die Eigenzeit des daheimgebliebenen Zwillings größer ist als die des Raumfahrers lautet in diesem Fall

$$2 \cdot \frac{t}{2} \;>\; 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$$

Da der Wurzelfaktor kleiner als 1 ist (α liegt zwischen 0° und 45°), stimmt die Ungleichung offensichtlich.



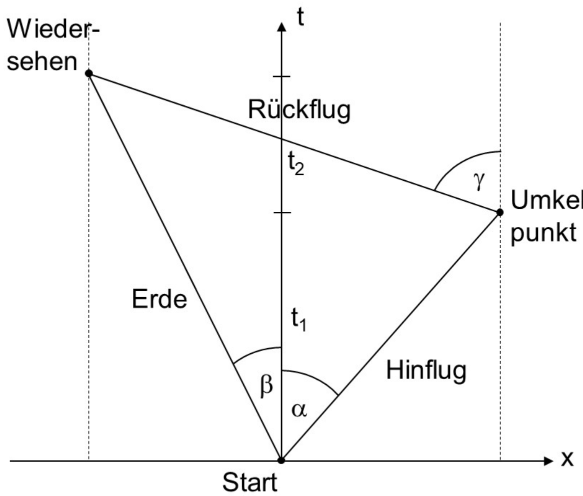
3. Im dritten Fall wurde ebenso das Ruhesystem der Erde als Inertialsystem gewählt. Nur darf der Flug des raumfahrenden Zwillings insofern etwas allgemeiner sein, als dass er auf dem Hin- und dem Rückflug nicht die gleiche Geschwindigkeit haben muss, die Zeiten für Hin- und Rückflug also ebenfalls verschieden groß sein dürfen. Hier lautet die Aussage über die größere Eigenzeit des Zwillings auf der Erde

$$t_1 + t_2 \;>\; t_1 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha} + t_2 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \gamma}$$

und die Bedingung, dass der Raumfahrer auch zur Erde zurückkehrt

$$\tan \alpha \cdot t_1 = \tan \gamma \cdot t_2$$

Das ist natürlich ein Spezialfall von 1. mit $\beta = 0°$ und braucht eigentlich nicht separat bewiesen zu werden. Wenn jemand nur mit diesem Fall argumentieren möchte, was völlig ausreichend ist, kommt man hier sogar ohne Rechenaufwand aus, die Richtigkeit der Ungleichung einzusehen. Die Dreiecksbedingung (Rückkehrbedingung) benötigt man auch nicht explizit. Wir haben t_1, t_2, α und γ so gesetzt, dass alles positive Größen sind. Die beiden Winkel liegen außerdem zwischen 0° und 45°, so dass die beiden Wurzeln Faktoren unter 1 ergeben. Offensichtlich ist die rechte Seite kleiner als die linke, wenn dort jeder Summand der linken Seite (t_1 bzw. t_2) mit einem Faktor unter 1 multipliziert wird.



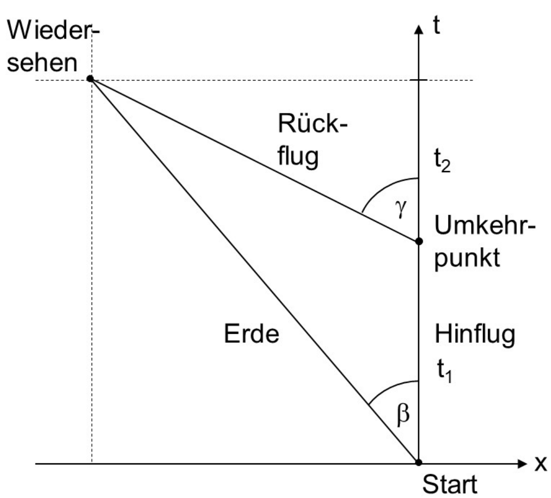
4. Während Fall 2 und 3 die Darstellung mit dem einfachsten Inertialsystem waren, dienen die restlichen drei Fälle der anfangs vorgenommenen Demonstration und Absicherung, dass auch bei anders gewähltem Inertialsystem sich stets der auf der Erde gebliebene Zwilling nachher als der ältere herausstellt. Mit dem Fall 4 wollen wir uns fragen, ob es etwas ausmacht, ein Inertialsystem zu wählen, in dem vom Startpunkt aus die Geschwindigkeiten der Zwillinge nicht in die gleiche, sondern in verschiedene Richtungen gehen. Winkel haben keine Orientierung. Sie sind hier so eingezeichnet, dass alle positiv zu nehmen sind. Als Ungleichung lautet die Aussage, dass der daheimgebliebene Zwilling mehr altert

$$(t_1 + t_2) \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \beta} \ > \ t_1 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha} + t_2 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \gamma}$$

Dass die drei Weltlinienstücke ein Dreieck bilden wird hier ausgedrückt durch

$$\tan \beta \cdot (t_1 + t_2) + \tan \alpha \cdot t_1 = \tan \gamma \cdot t_2$$

Die Rechnung, die die obige Ungleichung beweist, funktioniert genau wie in Fall 1. Die Rechnung ist symmetrisch in den Paaren t_1 und α bzw. t_2 und γ. Nur diese Variablenpaare tauschen in der Rechnung die Rollen.



5. Um auch zu zeigen, dass es keine Rolle spielt, welchem Zwilling man einmal gönnt, dass das gewählte Inertialsystem sein Ruhesystem ist, wird in diesem Fall das System des Raumfahrers auf dem Hinflug als Inertialsystem genommen.
Die zu beweisende Aussage über die Eigenzeiten lautet

$$(t_1 + t_2) \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \beta} \ > \ t_1 + t_2 \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \gamma}$$

und die Bedingung des geschlossenen Dreiecks lautet

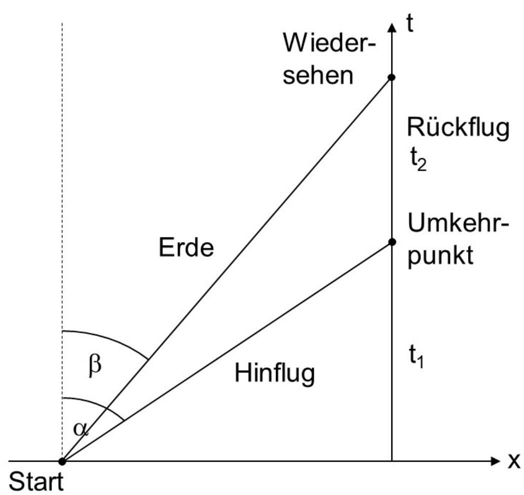
$$(t_1 + t_2) \cdot \tan \beta = t_2 \cdot \tan \gamma$$

Lösen wir die Dreiecksbedingung wiederum nach $\tan\beta$ auf und setzen dies in die Ungleichung ein, die wir dann gleich quadriert betrachten.

$$\tan\beta = \frac{t_2 \cdot \tan\gamma}{t_1 + t_2}$$

$$\begin{aligned}
(t_1+t_2)^2 \cdot \left(1 - \frac{t_2^2 \cdot \tan^2\gamma}{(t_1+t_2)^2}\right) &> t_1^2 + t_2^2\,(1-\tan^2\gamma) + 2\,t_1 t_2\,\sqrt{1-\tan^2\gamma} \\
(t_1+t_2)^2 - t_2^2 \cdot \tan^2\gamma &> t_1^2 + t_2^2 - t_2^2\,\tan^2\gamma + 2\,t_1 t_2\,\sqrt{1-\tan^2\gamma} \\
2\,t_1 t_2 &> 2\,t_1 t_2\,\sqrt{1-\tan^2\gamma} \\
1 &> \sqrt{1-\tan^2\gamma}
\end{aligned}$$

Da auch hier γ zwischen 0° und 45° liegt, existiert die Wurzel und das Ergebnis ist kleiner als 1. Also ist durch Äquivalenzumformungen die Richtigkeit der Ungleichung gezeigt.



6. Um last but not least zu zeigen, dass man auch im System des Raumfahrers auf dem Rückweg rechnen kann, ist das hier getan. Die zu beweisende Aussage über die Eigenzeiten lautet

$$(t_1+t_2)\cdot\sqrt{1-\tan^2\beta} \;>\; t_1\cdot\sqrt{1-\tan^2\alpha} + t_2$$

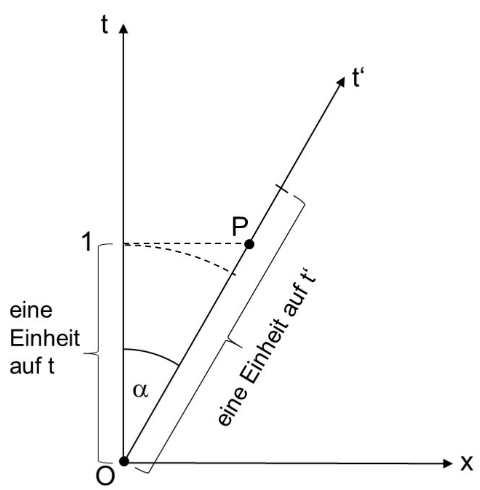
und die Bedingung des geschlossenen Dreiecks lautet

$$(t_1+t_2)\cdot\tan\beta = t_1\cdot\tan\alpha$$

In der Rechnung zum Beweis tauschen gegenüber dem Fall 5 lediglich t_1 und t_2 sowie α und γ die Rollen.

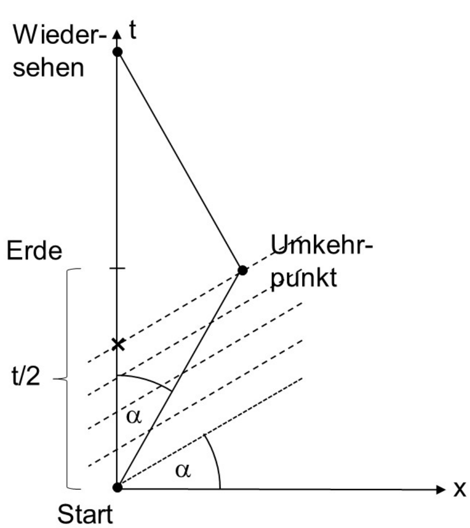
Manche Darstellungen (z.B. http://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Zwillingsparadoxon) versuchen den Altersunterschied der Zwillinge mit Linien der Gleichzeitigkeit zu veranschaulichen. Das braucht dann einen Sprung, ein plötzliches Nachaltern des Zwillings auf der Erde im Moment der Umkehr des Raumfahrers. Nicht nur dieser Aspekt ist verwirrend. Um wirklich schlüssig zu sein, kommt man auch hier nicht ohne die Berechnung der Eigenzeiten aus. Gleichzeitigkeitslinien machen besonders deutlich, dass das Umkehren des Raumfahrers mit einem Wechsel des Inertialsystems verbunden ist, was entscheidenden Einfluss auf die Zeitberechnung hat und eben die Rollen der Zwillinge nicht vertauschbar macht. Die explizite Altersberechnung verkomplizieren sie eher.

Um zu zeigen, dass der Raumfahrer weniger altert als der zuhause bleibende Zwilling, sollte man eine quantitative Berechnung machen. Die in der genannten Quelle gegebene Argumentation geht nämlich so: Wir betrachten für den Hinflug das System des Raumfahrers, der Bruder auf der Erde altert während des Hinflugs weniger (bewegte Uhr aus Sicht des Raumfahrers). Wir betrachten für den Rückflug wiederum das jetzt andere System des Raumfahrers und wieder altert in diesem System der Bruder auf der Erde weniger während des Flugs. Um Hin- und Rückflugsystem verbinden und immer noch mit der Erde vergleichen zu können, gibt es für den Bruder auf der Erde im Moment des Umkehrens eine plötzliche Nachalterung. Nun wird argumentiert, dass diese plötzliche Nachalterung die während des Hin- und Rückflugs im Sinne der Gleichzeitigkeit gesehenen Alterungsdefizite überwiegt. Dass von zwei Beiträgen unterschiedlichen Vorzeichens einer stets überwiegt, braucht meines Erachtens einen Beweis. Rein geometrisch oder graphisch ist das nicht ohne Weiteres zu sehen, wegen der richtigen Abstände, die jeweils eine Zeiteinheit auf den Weltlinien bedeuten, wie wir sehen werden.



In dem nebenstehenden Diagramm ist in ein Inertialsystem mit x und t (Erde) die Zeitachse t' eines anderen Inertialsystems eingezeichnet (die Weltlinie des Raumfahrers auf dem Hinflug). Die Einheiten auf den beiden Zeitachsen sind aber weder rein zeichnerisch gleich lang, noch ist die Einheit auf der t'-Achse zu gewinnen, indem man einfach horizontal von der t-Achse hinübergeht. Wenn wie in der Zeichnung auf der t-Achse vom Nullpunkt aus eine Einheit 1 abgetragen ist, hat auf der t'-Achse rein geometrisch zeichnerisch die Strecke $\overline{\mathrm{OP}}$ die Länge $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$.

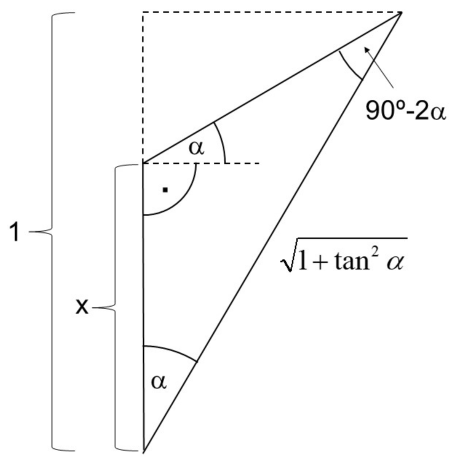
Richtig eingetragen beträgt eine Einheit auf der t'-Achse von der Streckenlänge her vom Nullpunkt aus $\sqrt{1+\tan^2\alpha}/\sqrt{1-\tan^2\alpha}$. Gut erklärt findet man dies unter www.physki.de/PhysKi/index.php?title=Minkowski-Diagramm . Von O nach P sind es also auf der t'-Achse $\sqrt{1+\tan^2\alpha}/(\sqrt{1+\tan^2\alpha}/\sqrt{1-\tan^2\alpha}) = \sqrt{1-\tan^2\alpha}$ Einheiten. Das ist die richtige Eigenzeit entlang der Weltlinie $\overline{\mathrm{OP}}$ und da $\sqrt{1-\tan^2\alpha}$ ($\alpha \leq 45°$) kleiner als 1 ist, die korrekte Interpretation von "bewegte Uhren gehen langsamer".



Wie unter physik.cosmos-indirekt.de sind im hier nebenstehenden Diagramm Linien der Gleichzeitigkeit für den Raumfahrer auf dem Hinflug eingetragen. Seine Zeitachse t' hat den Winkel α zur Vertikalen, dann hat die zugehörige Raumachse x' dieses Inertialsystems den Winkel α zur Horizontalen. Linien der Gleichzeitigkeit sind Parallelen zu dieser x'-Achse.

Man sieht, dass der Raumfahrer nicht den Punkt auf der Hälfte zwischen Start und Wiedersehen auf der Zeitachse des Bruders auf der Erde als gleichzeitig mit seiner Umkehr erachtet, sondern für den Erdzwilling einen früheren Punkt (Kreuz).

Aber der Zwilling auf der Erde ist nicht bis zu dem mit dem Kreuz gekennzeichneten Punkt genausoviel gealtert wie der Raumfahrer auf dem Hinflug bis zum Umkehrpunkt. In der angegebenen Quelle sind dazu Punkte von Eigenzeiteinheiten auf beiden Weltlinien eingezeichnet. Die z.B. vier Gleichzeitigkeitslinien decken für den Raumfahrer mehr Punkte ab als für den Zwiling auf der Erde. Die Konstruktion der Punkte bzw. Berechnung ihrer Abstände wird aber nicht erklärt, so wie es in diesem Text auf der vorherigen Seite mit dem oberen Bild geschehen ist.

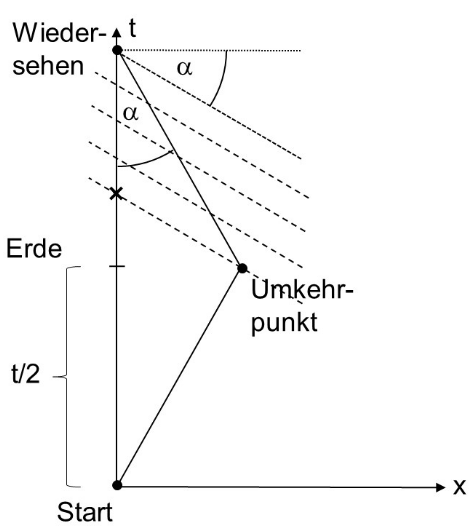


Treiben wir etwas Trigonometrie, um festzustellen, wo der Punkt mit dem Kreuz überhaupt liegt. Dazu ist hier das Dreieck aus Start, Umkehrpunkt und dem Punkt mit dem Kreuz herausgezeichnet. Der Einfachheit halber lassen wir die Strecke vom Start zum Umkehrpunkt mit der gezeichneten Länge $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$. Die Länge 1 auf der Vertikalen wird dann der Zeit $t/2$ auf der Erde entsprechen. Wie lang ist x? x ist hier gerade einfach die Bezeichnung für die Unbekannte in der Rechnung, es hat nichts mit den Raumachsen zu tun.

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, wie man auf die restlichen Winkel des Dreiecks schließt und dann liefert Anwendung des Sinussatzes:

$$\frac{x}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sin(90° - 2\alpha)}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{\cos(2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1/\cos\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Also $x = 1 - \tan^2\alpha$. Da auf der t-Achse die geometrische Länge direkt die Eigenzeit ist (bis auf den Faktor $t/2$, wenn t die gesamte Zeit vom Start bis zum Wiedersehen ist), ist der Zwilling auf der Erde bis zum Kreuz die Zeit $1 - \tan^2\alpha$ gealtert. Für den Raumfahrer wissen wir schon, dass die Eigenzeit bis zum Umkehrpunkt $\sqrt{1-\tan^2\alpha}$ ist. Da es sich bei $1 - \tan^2\alpha$ um eine Zahl zwischen 0 und 1 handelt, ist der Ausdruck mit der Wurzel der größere Wert und der Ausdruck ohne die Wurzel der kleinere. Bis zur Gleichzeitigkeitslinie durch den Umkehrpunkt ist der Zwilling auf der Erde tatsächlich weniger gealtert als der Raumfahrer. Ohne weitere Rechnung sehen wir jetzt, dass die Hälfte der beschriebenen plötzlichen Nachalterung dem Stück $1 - x = \tan^2\alpha$ entspricht.



Das nebenstehende Diagamm mit den Gleichzeitigkeitslinien im System des Raumfahrers auf dem Rückflug zeigt, dass sich für den Rückflug nochmals die gleiche Rechnung ergibt.

Die Eigenzeiten des Bruders auf der Erde vom Start bis zum Gleichzeitigkeitspunkt zum Umkehrpunkt im Hinflugsystem und vom Gleichzeitigkeitspunkt zum Umkehrpunkt im Rückflugsystem bis zum Wiedersehen sind kleiner als die Eigenzeiten des Raumfahrers:

$$2 \cdot \frac{t}{2} \cdot (1 - \tan^2 \alpha) \; < \; 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$$

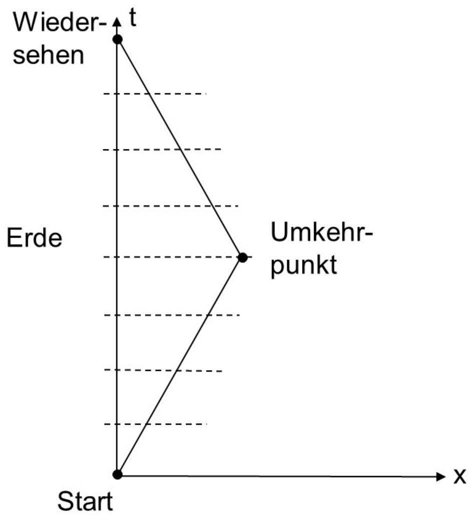
Mit der Nachalterung für das fehlende Stück dazu sind sie allerdings größer:

$$2 \cdot \frac{t}{2} \cdot (1 - \tan^2 \alpha) + 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \tan^2 \alpha \; > \; 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$$

Das ist der rechnerische Beweis, dass die Nachalterung die Zeitdifferenz der durch die Gleichzeitigkeitslinien abgedeckten Abschnitte mehr als wettmacht. Aber die Rechnung ist mehr als umständlich. Die Eigenzeit des Raumfahrers haben wir doch ausrechnen müssen, Zeiten ließen sich nicht direkt geometrisch vergleichen. Da ist das Aufstellen der Ungleichung

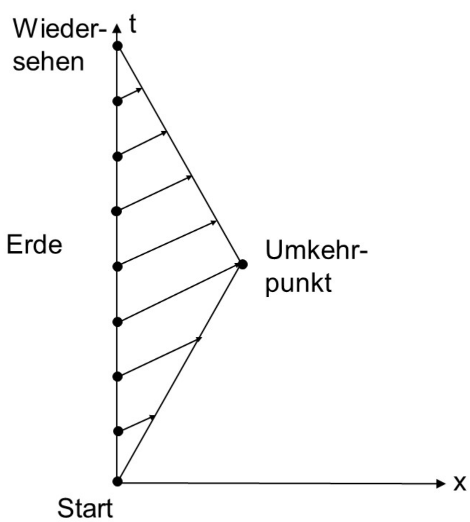
$$2 \cdot \frac{t}{2} \; > \; 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$$

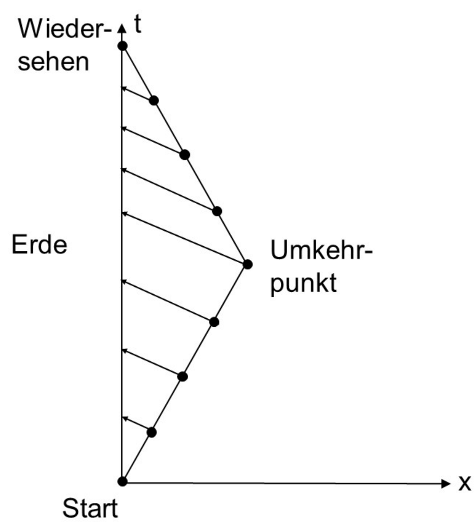
wie wir es vorher in Fall 2 getan haben, kürzer und klarer.



Und wenn wir die Gleichzeitigkeitslinien im System des Zwillings auf der Erde zeichnen? Solche bringen überhaupt keinen Aufschluss. Gleich viele schneiden die Weltlinien beider Zwillinge, aber zwischen aufeinanderfolgenden sind die Eigenzeiten auf beiden Weltlinien eben nicht gleich.

Ein anderer Versuch, das Paradoxon aufzuklären, verwendet Lichtsignale, die die Zwillinge aussenden. (Lichtsignale laufen im Minkowski-Diagramm unter 45°-Winkeln; hier flacher gezeichnet.) Aber egal, wieviele Lichtsignale ein Zwilling aussendet, sie kommen alle während der Reise beim anderen Zwilling an. Zwar mag sich der Abstand des Ankommens ändern, aber alle Signallinien bleiben in unserem Dreieck. Sollten beide Zwillinge während der Reise gleich viele Signale aussenden, empfangen sie auch gleich viele.





Auch die Bilder mit den Lichtsignalen gehen am Kern der Erklärung für den Altersunterschied vorbei. Wichtig ist nämlich, in welchem zeitlichen Abstand jeder Zwilling seine Signale aussendet. Jeder tut dies im Abstand von einer Einheit (z.B. ein Jahr) seiner eigenen Zeit. Wir müssen also schon wissen, dass auf der Weltlinie des Zwillings auf der Erde mehr Einheiten der Eigenzeit vergehen als auf der Weltlinie des Raumfahrers, ehe wir korrekte Bilder zeichnen, in denen der Erdzwilling mehr Signale aussendet als der Raumfahrer. Für die Altersfrage können wir dann jedoch einfach die Punkte auf den Linien zählen und brauchen die Lichtsignale gar nicht.