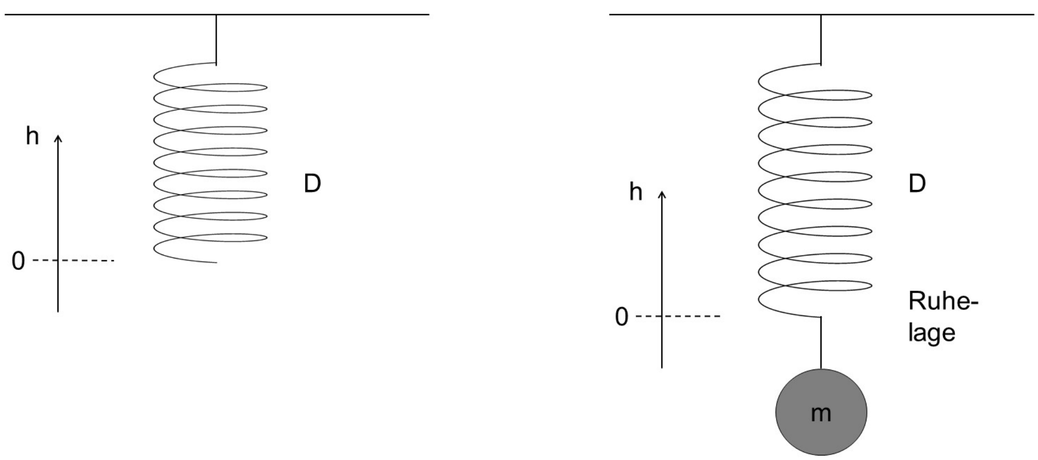
Nullpunkt beim hängenden Federpendel

Die Spannenergie, die in einer Feder steckt, beträgt $E_{Spann} = \frac{1}{2}\, D\, s^2$, wobei D die Federkonstante ist und s die Strecke, um die die Feder gegenüber ihrem unbelasteten Zustand verlängert (oder verkürzt) wurde. Sehr einfach kann man eine Spannung der Feder bewirken, indem man eine Masse an sie dranhängt. Da nun die Energie quadratisch mit der Verlängerung geht, die Verlängerung nach dem Hookschen Gesetz jedoch linear mit der Kraft, ist z.B. die Spannenergie, wenn man zwei Massen m_1 und m_2 zusammen an die Feder hängt, nicht gleich der Summe der Spannenergien, die sich ergeben, wenn man jede Masse einzeln daran hängt. Beim Übergang von der statischen Dehnung der Feder zum Federpendel wird jedoch fast unmerklich ein Wechsel der Nullposition vollzogen, von der aus eine Verlängerung der Feder gezählt wird. Dann braucht man keinen Unterschied mehr zu machen in der Behandlung eines waagerechten Federpendels, etwa eines Wagens an einer horizontalen Feder, und einem senkrechten Federpendel, wo die schwingende Masse an der Feder hängt und eigentlich auch die Gewichtskraft mitspielt. In Dorn/Bader Physik Oberstufe MS, Kapitel 63, wird immerhin dargestellt, wie man zu einer Differenzkraft aus Gewichtskraft und Federkraft übergeht, die dann von dem neuen Nullpunkt mit bereits angehängter Masse aus wieder die Form $-Ds$ wie im Hookeschen Gesetz hat. Aber ist dieser Nullpunktwechsel auch für die Energiebetrachtung zulässig bzw. was bedeutet er für die Energie? Das ist das Thema dieses Aufsatzes.



Ausgangspunkt für das Hookesche Gesetz, wo man die Feder in statischen Zuständen betrachtet, ist die unbelastete Feder (linkes Bild). Betrachtet man jedoch ein Federpendel, also eine an einer Feder hängende Masse, die zusätzlich ausgelenkt wird, und dann nach oben und unten schwingt, misst man üblicherweise die Position vom Zustand mit der bereits an der Feder hängenden Masse (in Ruhe) aus (rechtes Bild). Mit der angehängten Masse als schwingendem Körper und der idealerweise als masselos angenommenen Feder ist die Position des betrachteten Körpers eigentlich sogar stets der Mittelpunkt der Masse. Zum Vergleich mit der unbelasteten Feder ist hier aber das untere Ende der Feder als der Punkt markiert, dessen Auf- und Abbewegung betrachtet werden soll; das gibt wegen der starren Verbindung zur Masse dieselben Auslenkungen.
Aber allein dadurch, dass die Masse an der Feder hängt, wirkt doch eine Kraft auf die Feder, ist die Feder verlängert und hat bereits eine Spannenergie. Warum kann man diesen Anteil bei der Berechnung des Federpendels jetzt plötzlich weglassen, wo doch die Spannenergie nicht linear mit der Verlängerung geht?

Ich schreibe hier zunächst die übliche Berechnung des Federpendels auf. Dann mache ich den Ansatz für die Berechnung erneut, beziehe aber die immer vorhandene statische Gewichtskraft der angehängten Masse mit ein.

Wir haben $v = \dot{h}$ und $a = \dot{v} = \ddot{h}$. Mit dem Nullpunkt für die Höhe wie im rechten Bild wird die folgende Differentialgleichung angesetzt:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -D \cdot h \\ m \cdot \ddot{h} &= -D \cdot h \end{aligned}$$

Als Lösung setzen wir $h(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ an. Einsetzen führt natürlich auf $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.
φ_0 können wir frei wählen, nehmen wir $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, womit $h(t) = -A \cdot \cos(\omega t)$ wird.
Die Funktionen für Höhe und Geschwindigkeit lauten also

$$\begin{aligned} h(t) &= -A \cdot \cos(\omega t) \\ v(t) &= \dot{h}(t) = A\,\omega \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Energie $E = E_{Spann} + E_{kin}$.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} D \cdot (h(t))^2 + \frac{1}{2} m \cdot (v(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} D \cdot (-A \cdot \cos(\omega t))^2 + \frac{1}{2} m \cdot (A\,\omega \sin(\omega t))^2 \\ &= \frac{1}{2} DA^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} DA^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} DA^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} DA^2 \end{aligned}$$

Nun wird die Berechnung des Federpendels mit dem Nullpunkt wie im linken Bild wiederholt. $v = \dot{h}$ und $a = \dot{v} = \ddot{h}$ gelten genauso. Aber Federkraft und Gewichtskraft werden als zwei Anteile genommen. Die Differentialgleichung für die Bewegung lautet dann:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -D \cdot h - m \cdot g \\ m \cdot \ddot{h} &= -D \cdot h - m \cdot g \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist $h_1 = -\frac{mg}{D}$ mit $\ddot{h}_1 = 0$.
Als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $m \cdot \ddot{h} = -D \cdot h$ setzen wir $h_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ an. Einsetzen führt natürlich auf $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.
φ_0 können wir hier immer noch frei wählen und entscheiden uns für $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$,
womit $h_2(t) = -A \cdot \cos(\omega t)$ wird.

Zusammen erhalten wir als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{mg}{D} - A \cdot \cos(\omega t) \\ v(t) &= \dot{h}(t) \;=\; A\,\omega\,\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wir ziehen also zum Start wiederum die Feder nach unten lang und lassen dort los, nur dass die Position jetzt von der Höhe aus gemessen wird, wo sich das untere Ende der Feder ohne angehängte Masse befinden würde.

Jetzt berechnen wir die Energie $E = E_{Spann} + E_{pot} + E_{kin}$. (Wenn wir die Gewichtskraft mitnehmen, muss auch die potentielle Energie im Schwerefeld dabei sein.)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,D \cdot (h(t))^2 + m \cdot g \cdot h(t) + \frac{1}{2}\,m \cdot (v(t))^2 \\ &= \frac{1}{2}\,D \cdot \Big(-\frac{mg}{D} - A \cdot \cos(\omega t)\Big)^2 + mg \cdot \Big(-\frac{mg}{D} - A \cdot \cos(\omega t)\Big) + \frac{1}{2}\,m \cdot (A\,\omega\,\sin(\omega t))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 g^2}{D} + mgA\,\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\,DA^2\cos^2(\omega t) - \frac{m^2 g^2}{D} - mgA\,\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\,mA^2\omega^2\,\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}\,DA^2\,\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}\,DA^2\,\sin^2(\omega t) - \frac{1}{2}\,\frac{m^2 g^2}{D} \\ &= \frac{1}{2}\,DA^2 - \frac{1}{2}\,D\,\left(\frac{mg}{D}\right)^2 = \frac{1}{2}\,DA^2 - mg \cdot \frac{mg}{D} + \frac{1}{2}\,D\,\left(\frac{mg}{D}\right)^2 \end{aligned}$$

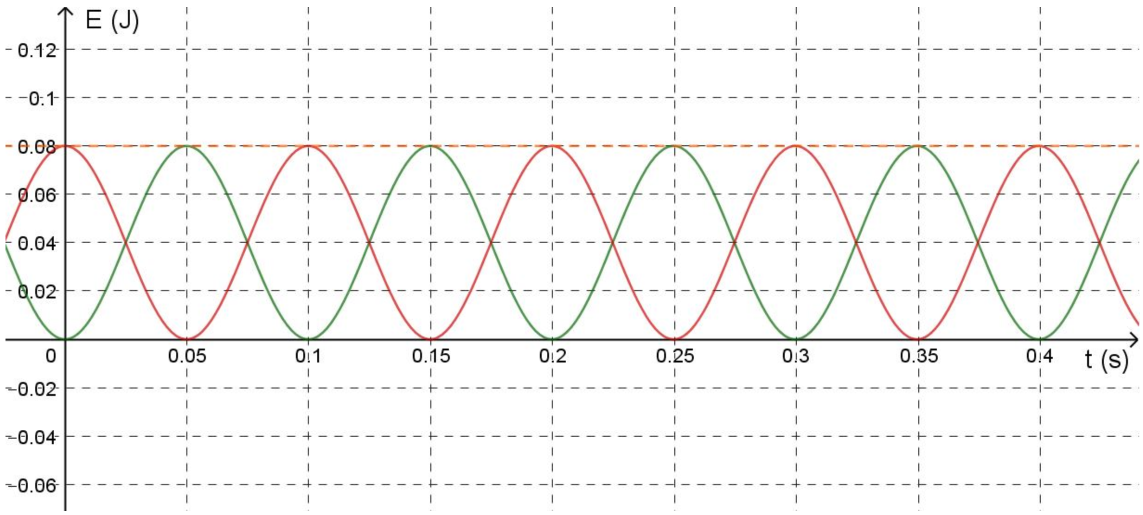
Die Gesamtenergie ist selbstverständlich auch bei dieser Rechnung konstant. Ihr Wert unterscheidet sich vom Ergebnis der ersten Rechnung um einen Betrag, der der Spannenergie der Feder mit der angehängten Masse in Ruhe entspricht (erste Schreibweise der Gesamtenergie in der letzten Zeile). Aber warum minus für eine Spannenergie? Die bessere Interpretation liefert die zweite Schreibweise in der letzten Zeile: Vom unteren Ende der unbelasteten Feder aus wird beim Anhängen im Gravitationsfeld die potenzielle Energie der Masse um mgh_0 mit $h_0 = mg/D$ abgesenkt. Da das jedoch die Feder langzieht, kommt der letzte Term als Spannenergie positiv dazu.

Der Unterschied im Ergebnis für die Gesamtenergie bei den beiden Rechnungen hängt nicht von der Amplitude der Schwingung ab. Und diese Tatsache rechtfertigt es, Federschwingungen nach der ersten Version zu behandeln und den Ausdruck $\frac{1}{2}\,D\,A^2$ als Energie der Federschwingung anzusehen.

Im ersten Fall pendelt die Energie zwischen kinetischer und Spannenergie. Die kinetische Energie ist im zweiten Fall zu jeder Zeit dieselbe wie im ersten Fall. Wenn wir den Rest als auf Spannenergie und potenzielle verteilt auffassen, ist auch von diesen keine konstant. Auf der folgenden Seite ist interessehalber der zeitliche Verlauf der Energieanteile einmal für ein Beispiel ausgerechnet.

Beispiel: $D = 100$ N/m, $m = 0.101$ kg, $A = 0.04$ m, dann ist $\omega = 31.47$ Hz.

In diesem ersten Diagramm sind die Energieanteile nach der ersten Rechnung aufgetragen, und zwar die kinetische Energie in grün und die Spannenergie in rot. Die orange gestrichelte Linie zeigt die Summe, also die Gesamtenergie.



Im folgenden Diagramm sind die Energieanteile nach der zweiten Rechnung aufgetragen, die kinetische Energie in grün, die Spannenergie in rot und die potenzielle Energie in blau. Die Summe, also die Gesamtenergie ist die orange gestrichelte Linie.