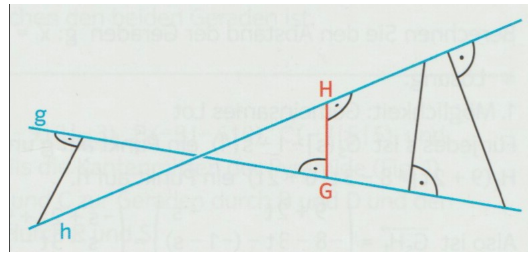
Abstand windschiefer Geraden

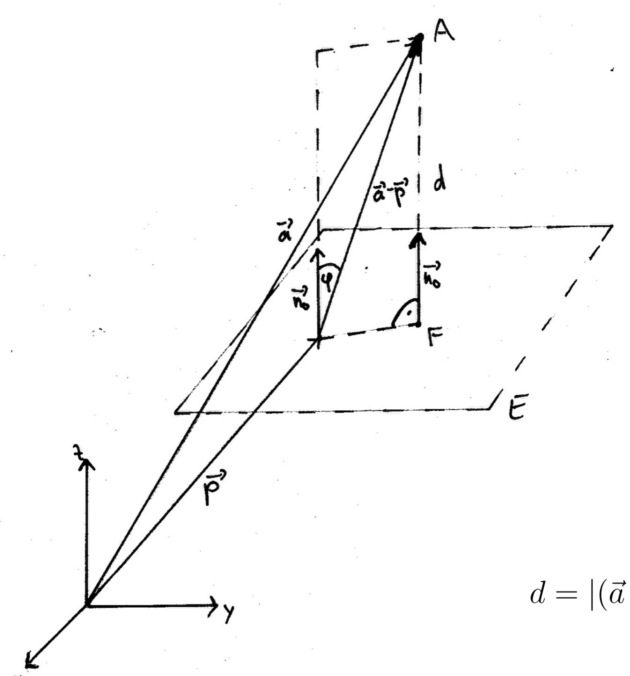
Abstände von Punkten, Geraden und Ebenen sind ein Thema in der Vektorgeometrie, insbesondere der Abstand zweier windschiefer Geraden voneinander[1]. Es gibt eine Abstandsformel, für die nur Angaben aus den Parameterdarstellungen der beiden Geraden benötigt werden. Um nur den Abstand anzugeben, muss man nicht wissen, wo die Fußpunkte dieser kürzesten Verbindung auf den beiden Geraden liegen. Sind allerdings die Fußpunkte gefragt, ist der Ansatz zu machen, dass der Vektor entlang dieser kürzesten Verbindung senkrecht auf beiden Geraden steht.



Der Abstand der beiden Geraden g und h ist $\overline{GH}$.

Man erhält die Parameter der Fußpunkte. Der Abstand ergibt sich dann leicht als Länge dieses Verbindungsvektors. Nur hat man anscheinend ganz anders gerechnet als mit der Abstandsformel. Inwiefern der Betrag dieses Verbindungsvektors und die Abstandsformel im Grunde dieselbe Formel darstellen, soll das Thema dieses Artikels sein. Zum Vergleich und der Vollständigkeit halber werden auch der Abstand eines Punkts von einer Ebene bzw. einer Geraden besprochen.

Abstand eines Punkts von einer Ebene



Der Punkt A sei durch den Ortsvektor $\vec{a}$ gegeben,

die Ebene E durch $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$. Sie hat den Stützvektor $\vec{p}$ und ihr Normalenvektor ist als $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ zu bilden.

Zu $\vec{n}$ gehört der Einheitsvektor $\vec{n}_0 = \vec{n}/|\vec{n}|$.

Der Abstand d des Punkts A von der Ebene E ist die Projektion von $\vec{a} - \vec{p}$ auf $\vec{n}_0$.

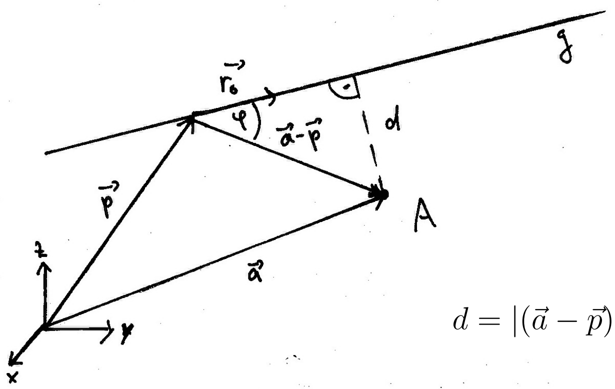
$$d = |(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \cos\varphi| = |(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Den Ortsvektor $\vec{f}$ des Lotfußpunkts F kann man dann als $\vec{f} = \vec{a} - \dfrac{((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$ berechnen.

($\vec{n}_0$ könnte in die andere Richtung als gezeichnet zeigen, deshalb hier im Zähler kein Betrag.)

Der Ansatz, dass $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ senkrecht auf $\vec{u}$ und senkrecht auf $\vec{v}$ steht, führt im Grunde auf dieselbe Rechnung wie bei windschiefen Geraden. Diese Rechnung und der recht aufwändige Nachweis, dass der so ermittelte Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ ein Vektor der Länge d in Richtung von $\vec{n}_0$ ist, wird somit im Abschnitt zu den windschiefen Geraden gegeben.

Abstand eines Punkts von einer Geraden



Der Punkt A sei durch den Ortsvektor $\vec{a}$ gegeben,

die Gerade g durch $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$.
$\vec{r}_0$ ist der Einheitsvektor zu $\vec{r}$.

Der Abstand d beträgt

$$d = |(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \sin\varphi| = |(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}_0| = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}}{|\vec{r}|} \right|$$

Für den Ortvektor des Lotfußpunkts F verwenden wir einfacher kein Kreuzprodukt, sondern

$$\vec{\mathrm{F}} = \vec{p} + \frac{((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Wenn man anders die ganze Rechnung mit dem Lotfußpunkt ansetzt, geht es so:
Der Lotfußpunkt F liegt auf g und der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ steht senkrecht auf $\vec{r}$.

$$(\vec{p} + t\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{r} = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{r} + t|\vec{r}|^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{F}} = \vec{p} + \frac{((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Der Verbindungsvektor ist dann $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{p} - \vec{a} + \dfrac{((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} = ((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_0 - (\vec{a} - \vec{p})$

Ist sein Betrag dasselbe wie die Formel mit dem Kreuzprodukt oben für d?
$(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}_0$ hat die in der Zeichnung mit d bezeichnete Länge, ist jedoch ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{a} - \vec{p}$ und auf $\vec{r}_0$ und damit senkrecht zu der Ebene steht, in der g und A liegen. Der Ausdruck für $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ ist dagegen der Vektor entlang der gestrichelten Linie d in der Zeichnung, nämlich $\vec{a} - \vec{p}$ ohne seinen Anteil entlang $\vec{r}_0$. Zum Vergleich werden von beiden wirklich die Beträge bzw. deren Quadrate ausgerechnet. Damit die Schreibarbeit nicht zu mühsam wird, führen wir die neuen Bezeichnungen $\vec{b} = \vec{a} - \vec{p}$ und $\vec{r}_0 = \vec{e}$ ein. $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor.

$$|(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}_0|^2 = |\vec{b} \times \vec{e}|^2 = \left| \begin{pmatrix} b_2e_3 - b_3e_2 \\ b_3e_1 - b_1e_3 \\ b_1e_2 - b_2e_1 \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$b_2^2e_3^2 + b_3^2e_2^2 - 2b_2b_3e_2e_3 + b_3^2e_1^2 + b_1^2e_3^2 - 2b_1b_3e_1e_3 + b_1^2e_2^2 + b_2^2e_1^2 - 2b_1b_2e_1e_2 =$$

$$b_1^2(e_2^2 + e_3^2) + b_2^2(e_1^2 + e_3^2) + b_3^2(e_1^2 + e_2^2) - 2b_2b_3e_2e_3 - 2b_1b_3e_1e_3 - 2b_1b_2e_1e_2$$

$$(((\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_0 - (\vec{a} - \vec{p}))^2 = ((\vec{b} \cdot \vec{e})\vec{e} - \vec{b})^2 = (\vec{b} \cdot \vec{e})^2\, \vec{e}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{e})(\vec{e} \cdot \vec{b}) =$$

$$\vec{b}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{e})^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)^2 =$$

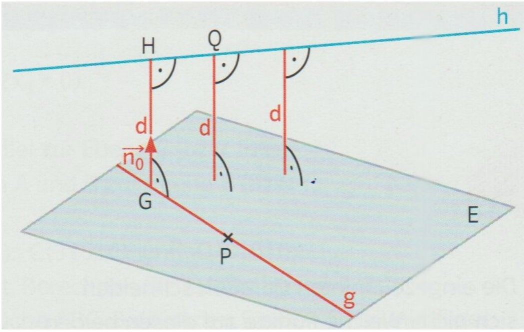
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1^2e_1^2 - b_2^2e_2^2 - b_3^2e_3^2 - 2b_1b_2e_1e_2 - b_2b_3e_2e_3 - 2b_1b_3e_1e_3 =$$

$$b_1^2(1 - e_1^2) + b_2^2(1 - e_2^2) + b_3^2(1 - e_3^2) - 2b_1b_2e_1e_2 - b_2b_3e_2e_3 - 2b_1b_3e_1e_3$$

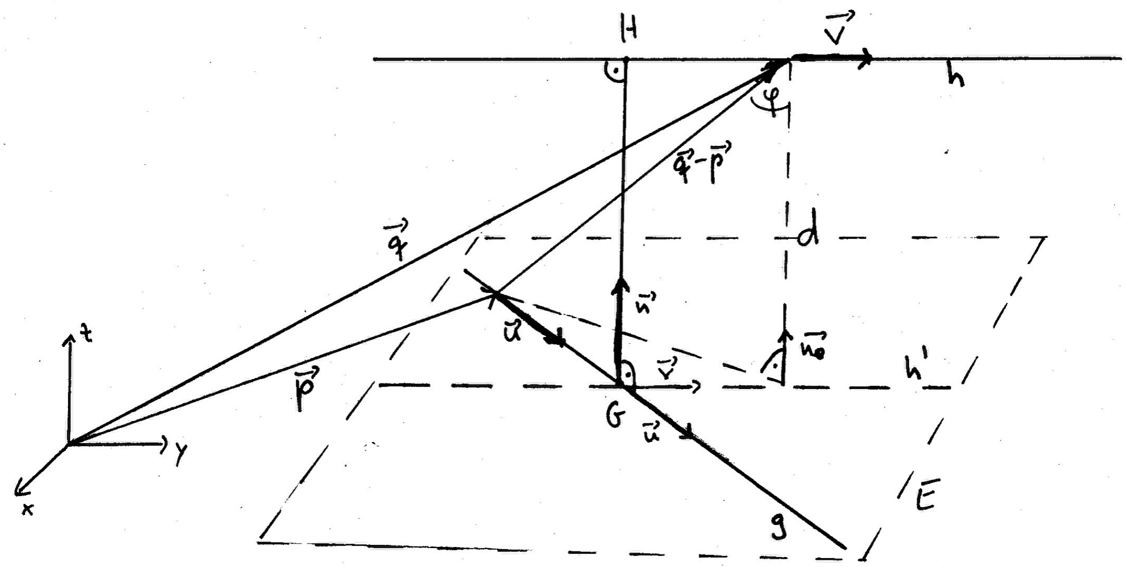
Das ist dasselbe, weil $1 - e_1^2 = e_2^2 + e_3^2$ und zyklisch.

q.e.d

Abstand windschiefer Geraden



Um aus geometrischen Überlegungen eine Abstandsformel aufzustellen macht man folgende Hilfskonstruktion:
Man nimmt die Ebene E hinzu, die die Gerade g enthält und zu der die Gerade h parallel ist. Dann hat der Abstand jedes Punkts der Gerade h zur Ebene E die Länge d, der auch die Länge der kürzesten Verbindung zwischen g und h ist.



Die beiden Geraden g und h seien gegeben durch g: $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$.
In der Ebene E ist noch die zu h parallele Gerade h' eingezeichnet.
Der Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, der dazugehörige Einheitsvektor sei $\vec{n}_0$.

Der Abstand d ist die Projektion von $\vec{q} - \vec{p}$ auf $\vec{n}_0$.

$$d = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \cos\varphi| = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Die Abstandsformel liefert aber hier keinen Ausgangspunkt, um die Fußpunkte G und H zu bestimmen. Da G ein Punkt auf g und H ein Punkt auf h ist, ist mit den entsprechenden s und t ihr Differenzvektor $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \vec{q} + t\vec{v} - \vec{p} - s\vec{u}$. Er steht senkrecht auf $\vec{u}$ und auf $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} (\vec{q} + t\vec{v} - \vec{p} - s\vec{u}) \cdot \vec{u} &= 0 \\ (\vec{q} + t\vec{v} - \vec{p} - s\vec{u}) \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$ und subtrahieren die zweite davon.

$$\frac{(\vec{u}\vec{v})(\vec{q}\vec{u})}{|\vec{u}|^2} + t\frac{(\vec{u}\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2} - \frac{(\vec{u}\vec{v})(\vec{p}\vec{u})}{|\vec{u}|^2} - s\vec{u}\vec{v} - \vec{q}\vec{v} - t|\vec{v}|^2 + \vec{p}\vec{v} + s\vec{u}\vec{v} = 0$$

$$t\left(\frac{(\vec{u}\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2} - |\vec{v}|^2\right) = (\vec{q} - \vec{p})\vec{v} - \frac{(\vec{u}\vec{v})((\vec{q} - \vec{p})\vec{u})}{|\vec{u}|^2}$$

$$t=\frac{(\vec q-\vec p)\vec v|\vec u|^2-(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec u)}{(\vec u\vec v)^2-|\vec u|^2|\vec v|^2}$$

Der Ortsvektor des Punkts H ist

$$\vec{\mathrm{H}}=\vec q+t\vec v=\vec q+\frac{((\vec q-\vec p)\vec v)\vec v|\vec u|^2-(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec u)\vec v}{(\vec u\vec v)^2-|\vec u|^2|\vec v|^2}$$

Von unseren beiden Ausgangsgleichungen multiplizieren wir jetzt die zweite mit $\dfrac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|^2}$ und subtrahieren die erste davon.

$$\frac{(\vec u\vec v)(\vec q\vec v)}{|\vec v|^2}+t\vec u\vec v-\frac{(\vec u\vec v)(\vec p\vec v)}{|\vec v|^2}-s\frac{(\vec u\vec v)^2}{|\vec v|^2}-\vec q\vec u-t\vec u\vec v+\vec p\vec u+s|\vec u|^2=0$$

$$\frac{(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec v)}{|\vec v|^2}-(\vec q-\vec p)\vec u=s\left(\frac{(\vec u\vec v)^2}{|\vec v|^2}-|\vec u|^2\right)$$

$$s=\frac{(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec v)-(\vec q-\vec p)\vec u|\vec v|^2}{(\vec u\vec v)^2-|\vec u|^2|\vec v|^2}$$

Der Ortsvektor des Punkts G ist

$$\vec{\mathrm{G}}=\vec p+s\vec u=\vec p+\frac{(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec v)\vec u-((\vec q-\vec p)\vec u)\vec u|\vec v|^2}{(\vec u\vec v)^2-|\vec u|^2|\vec v|^2}$$

Der Verbindungsvektor ist also $\overrightarrow{\mathrm{GH}}=$

$$\frac{(\vec u\vec v)^2(\vec q-\vec p)-|\vec u|^2|\vec v|^2(\vec q-\vec p)-(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec u)\vec v-(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec v)\vec u+|\vec u|^2((\vec q-\vec p)\vec v)\vec v+|\vec v|^2((\vec q-\vec p)\vec u)\vec u}{(\vec u\vec v)^2-|\vec u|^2|\vec v|^2}=$$

$$\frac{|\vec u|^2|\vec v|^2(\vec q-\vec p)-(\vec u\vec v)^2(\vec q-\vec p)+(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec v)\vec u+(\vec u\vec v)((\vec q-\vec p)\vec u)\vec v-|\vec u|^2((\vec q-\vec p)\vec v)\vec v-|\vec v|^2((\vec q-\vec p)\vec u)\vec u}{|\vec u|^2|\vec v|^2-(\vec u\vec v)^2}$$

Ist der Betrag dieses Vektors $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ gleich $|(\vec q-\vec p)\cdot\vec n_0|$?
Wir werden hier den sogar den Vektor selber statt nur den Betrag vergleichen. $(\vec q-\vec p)\cdot\vec n_0$ ist als Skalarprodukt kein Vektor, sondern nur die Länge (eventuell mit negativem Vorzeichen, nur deshalb der Betrag darum in der Abstandsformel). Mit $((\vec q-\vec p)\cdot\vec n_0)\vec n_0=\dfrac{((\vec q-\vec p)\cdot\vec n)\vec n}{|\vec n|^2}$ sollten wir den Vektor in der Richtung bzw. parallel zu $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ haben. Die Nenner stimmen überein, denn $|\vec n|^2=|\vec u\times\vec v|^2=|\vec u|^2\,|\vec v|^2\,\sin^2\varphi=|\vec u|^2\,|\vec v|^2\,(1-\cos^2\varphi)=|\vec u|^2\,|\vec v|^2-(\vec u\vec v)^2$.
Es gilt also noch die Zähler zu vergleichen. Wir führen die Bezeichnung $\vec r=\vec q-\vec p$ ein.

Die bekannte Formel $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\vec c)-\vec c(\vec a\vec b)$ wird umgestellt zu $(\vec b\vec a)\vec c=\vec b(\vec a\vec c)-\vec a\times(\vec b\times\vec c)$ verwendet mit $\vec b=\vec r=\vec q-\vec p$ und $\vec a=\vec c=\vec n$ verwendet. Außerdem war $\vec n=\vec u\times\vec v$. Dann ist

$$((\vec q-\vec p)\vec n)\vec n=(\vec r\vec n)\vec n=\vec r\,\vec n^2-\vec n\times(\vec r\times\vec n)=\vec r\,|\vec n|^2+(\vec r\times\vec n)\times(\vec u\times\vec v)$$

Auf den hinteren Teil wird $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\vec c)-\vec c(\vec a\vec b)$ angewendet mit
$\vec a=\vec r\times\vec n$, $\vec b=\vec u$ und $\vec c=\vec v$. Also

$$(\vec r\vec n)\vec n=\vec r\,|\vec n|^2+\vec u((\vec r\times\vec n)\vec v)-\vec v((\vec r\times\vec n)\vec u)$$

$|\vec{n}|^2$ kennen wir vom Nenner schon. Auch die restlichen $\vec{n}$ werden wieder durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ausgedrückt und die doppelten Kreuzprodukte werden wiederum nach der oben genannten Formel entwickelt.

$$(\vec{r}\vec{n})\vec{n} = \vec{r}\,(|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\vec{v})^2) + ((\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{v}))\vec{v})\vec{u} - ((\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{v}))\vec{u})\vec{v} =$$

$$\vec{r}\,(|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\vec{v})^2) + ((\vec{u}(\vec{r}\vec{v}) - \vec{v}(\vec{r}\vec{u}))\vec{v})\vec{u} - ((\vec{u}(\vec{r}\vec{v}) - \vec{v}(\vec{r}\vec{u}))\vec{u})\vec{v} =$$

$$\vec{r}\,|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \vec{r}\,(\vec{u}\vec{v})^2 + (\vec{u}\vec{v})(\vec{r}\vec{v})\vec{u} - |\vec{v}|^2(\vec{r}\vec{u})\vec{u} - |\vec{u}|^2(\vec{r}\vec{v})\vec{v} + (\vec{u}\vec{v})(\vec{r}\vec{u})\vec{v}$$

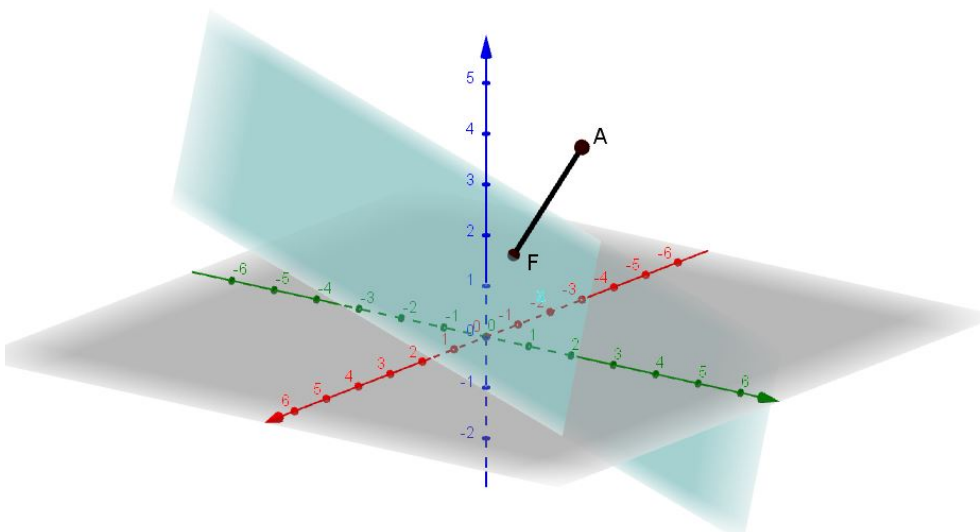
Wenn man noch $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p}$ wieder einsetzt, ist das der Zähler von $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$.

q.e.d.

Beispiele

Abstand eines Punkts von einer Ebene

Berechne den Abstand von A(-3|0|3) zu E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, sein Betrag $|\vec{n}| = \sqrt{49} = 7$.

$\vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = (-5) \cdot (-2) + (-1.5) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 17.5$

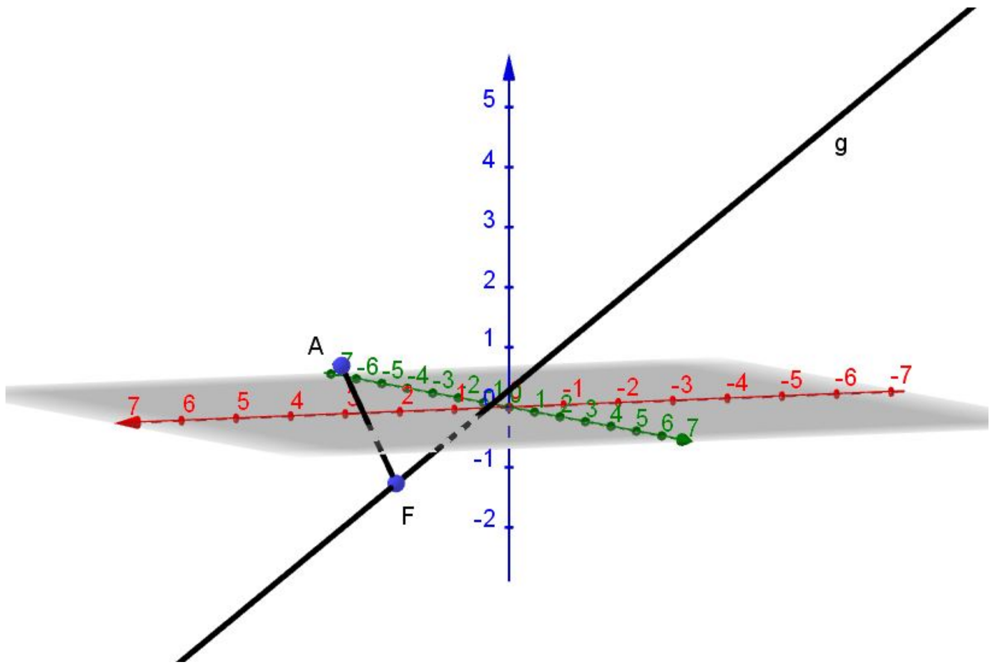
$$\text{also} \quad d = \left| \frac{17.5}{7} \right| = 2.5$$

Der Lotfußpunkt F hat den Ortsvektor

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2.5}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.29 \\ -1.07 \\ 0.86 \end{pmatrix}$$

Abstand eines Punkts von einer Geraden

Berechne den Abstand des Punkts $\mathrm{A}(4|2|1)$ von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$\vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} = 2.24$$

Für den Lotfußpunkt bereiten wir vor: $(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{r} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 6$

Also $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{6}^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ansatz über den Lotfußpunkt: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$(-3 + 2t) \cdot 2 + (-1 + t) \cdot 1 + (-1 - t) \cdot (-1) = 0 \;\Rightarrow\; 6t - 6 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1$

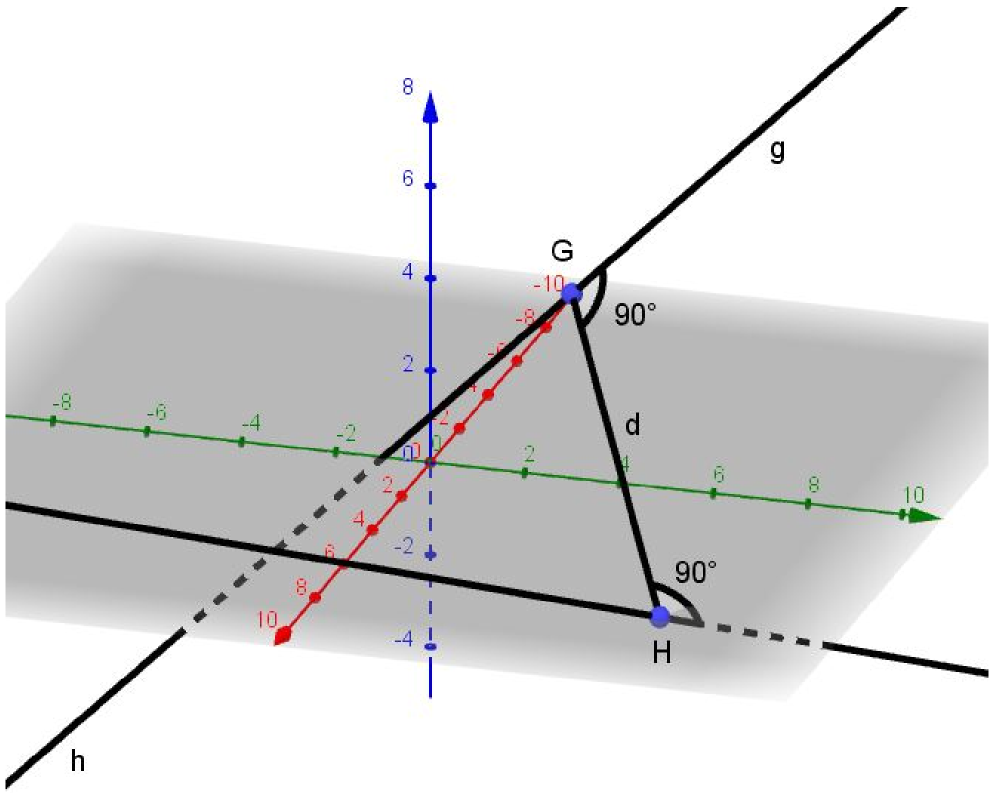
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Und der Betrag dieses Vektors ist in der Tat $|\overrightarrow{\mathrm{AF}}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} = 2.24$.

Abstand windschiefer Geraden

Was ist der Abstand zwischen den windschiefen Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$?



$\vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 7 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + (-2) \cdot (-4) = 81$ $\qquad$ $|\vec{n}| = \sqrt{81} = 9$, $\quad$ also $d = \left| \frac{81}{9} \right| = 9$

Ansatz, um die Lotfußpunkte zu ermitteln:

$$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(7 + 4t) \cdot 0 + (6 - s - 5t) \cdot 1 + (-2 - s + 2t) \cdot 1 = 0$$
$$(7 + 4t) \cdot 4 + (6 - s - 5t) \cdot (-5) + (-2 - s + 2t) \cdot 2 = 0$$

$$-2s - 3t + 4 = 0$$
$$3s + 45t - 6 = 0$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit (-1), teilen die zweite Gleichung durch 3 und bringen die Konstanten auf die rechte Seite.

$$2s + 3t = 4$$
$$s + 15t = 2$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 2 und subtrahieren sie von der ersten.

$$2s + 3t - 2s - 30t = 4 - 4 \;\Rightarrow\; -27t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 5 und subtrahieren die zweite.

$$10s + 15t - s - 15t = 20 - 2 \Rightarrow\; 9s = 18 \;\Rightarrow\; s = 2$$

Damit ist der Ortsvektor des Fußpunkts G: $\vec{\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

und der Ortsvektor des Fußpunkts H: $\vec{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir prüfen nach, dass sich nach den aufgestellten Formeln dieselben Ortsvektoren für die Fußpunkte ergeben. Zur Vorbereitung: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 = -3$, $|\vec{u}|^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2$, $|\vec{v}|^2 = 4^2 + (-5)^2 + 2^2 = 45$, $(\vec{u}\vec{v})^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 45 = -81$

$$\vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 4$$
$$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{v} = 7 \cdot 4 + 6 \cdot (-5) + (-2) \cdot 2 = -6$$

$$\vec{\mathrm{G}} = \vec{p} + \frac{(\vec{u}\vec{v})((\vec{q} - \vec{p})\vec{v}) - |\vec{v}|^2((\vec{q} - \vec{p})\vec{u})}{(\vec{u}\vec{v})^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{(-3) \cdot (-6) - 45 \cdot 4}{-81} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-162}{-81} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{H}} = \vec{q} + \frac{|\vec{u}|^2((\vec{q} - \vec{p})\vec{v}) - (\vec{u}\vec{v})((\vec{q} - \vec{p})\vec{u})}{(\vec{u}\vec{v})^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 4}{-81} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0}{-81} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Differenzvektor ist $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und sein Betrag ist $\sqrt{81} = 9$.

Dass hier der Endpunkt des Stützvektors einer Geraden ein Fußpunkt des Lots zwischen den Geraden ist, ist Zufall bei dieser Aufgabe (aus Lambacher Schweizer Mathematik Jahrgangsstufe für Berufliches Gymnasium).