Die Kreisbewegung in einer vertikalen Ebene und der Looping

Während die Kreisbewegung in einer horizontalen Ebene mittels der Zentripetalkraft recht direkt und klar erklärt werden kann, bereitet die Kreisbewegung in einer vertikalen Ebene Schwierigkeiten, weil hier die Gravitation mit ins Spiel kommt, die relativ zur Bahn auch noch ihre Richtung ändert. Aufgaben in Lehrbüchern sind mitunter so geschrieben, dass das Zusammenspiel von Zentripetal- (bzw. Zentrifugal-)Kraft und Gewichtskraft nicht klar wird und meiner Ansicht nach auch nicht ganz richtig erklärt wird.

Als Beispiel findet sich in den Abituraufgaben an beruflichen Gymnasien (TG) für Baden-Württemberg 2012 folgende Aufgabe:

(Das Bild hier ist ein ähnliches wie in der Aufgabe, es soll ja nur als Anschauung ein Fahrgeschäft zeigen; Quelle: https://www.ruhrnachrichten.de/werne/das-sind-die-neuen-fahrgeschaefte-bei-sim-jue-1336236.html)

In einem Jahrmarktfahrgeschäft sitzen die Fahrgäste in zwei offenen Gondeln, die am Ende eines rotierenden Trägerarmes drehbar aufgehängt sind. Gehen Sie für Ihre Rechnung davon aus, dass die Fahrgäste bei voller Fahrt eine Kreisbahn mit dem Radius 30 m durchlaufen, wobei der Betrag der Bahngeschwindigkeit mit 29 m/s konstant ist.

1. Berechnen Sie die Zeit für einen kompletten Umlauf bei voller Fahrt. Begründen Sie, warum es sich bei dieser Bewegung um eine beschleunigte Bewegung handelt, obwohl der Betrag der Bahngeschwindigkeit konstant ist. Berechnen Sie die Beschleunigung der Fahrgäste.

2. Die Masse einer Gondel mit Fahrgästen beträgt $m = 400$ kg. Berechnen Sie die Kräfte, denen die Gondelaufhängung während der Fahrt in folgenden Punkten ausgesetzt ist:
a) im untersten Punkt der Kreisbahn   b) im obersten Punkt der Kreisbahn
c) auf halber Höhe der Kreisbahn.

(Die Abituraufgabe geht noch weiter. Aber die folgenden Teile beschäftigen sich mit der Situation, dass ein Fahrgast ein Handy fallen lässt. Das fragt das Thema senkrechter und waagerechter Wurf ab, es geht nicht mehr um die Kreisbewegung, weshalb diese Aufgabenteile hier nicht interessieren.)

Die Lösung zu 1. lautet natürlich:

$$T = \frac{2\pi\, r}{v} = \frac{2\pi \cdot 30\,\mathrm{m}}{29\,\mathrm{m/s}} = 6.5\,\mathrm{s} \quad \text{für die Umlaufzeit}$$

und $\displaystyle a = \frac{v^2}{r} = \frac{(29\,\mathrm{m/s})^2}{30\,\mathrm{m}} = 28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für die Beschleunigung.

Und kurz gesagt, handelt es sich trotz des konstanten Betrags der Bahngeschwindigkeit um eine beschleunigte Bewegung, weil ja die Richtung ständig geändert wird.

Zu 2. werden in der Musterlösung die Gravitationskraft und die Zentrifugalkraft je nach Richtungen verrechnet. Diese sind

$$F_G = m \cdot g = 400\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3924\,\mathrm{N} \quad \text{und} \quad F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = 400\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(29\,\mathrm{m/s})^2}{30\,\mathrm{m}} = 11213\,\mathrm{N}$$

a) Im untersten Punkt zeigen sie in die gleiche Richtung: F_{tief} = 3924 N + 11213 N= 15137 N
b) Im obersten Punkt sind sie entgegengesetzt: F_{hoch} = 11213 N - 3924 N = 7289 N
c) Auf halber Höhe sind sie senkrecht zueinander: $F_{halb} = \sqrt{11213^2 + 3924^2}$ N = 11880 N

Wenn man sich diese beiden Lösungsteile anschaut, scheinen sie das Grundgesetz der Mechanik $F = ma$ zu verletzen. Die Beschleunigung ist nach 1. vom Betrag her überall auf der Bahn dieselbe. Der Betrag der Kraft soll aber nach 2. verschiedene Werte annehmen. Und es ändert sich hier keine Masse; die Masse ist die gegebene für eine Gondel mit Fahrgästen.
Die Beschleunigung in 1. ist vom ruhenden Bezugssystem aus gesehen, die, die der Beobachter sieht, der auf dem Boden steht und zum Beispiel das gezeigte Foto gemacht hat. Von der Zentri*fugal*kraft haben wir gehört, dass es eine Scheinkraft im mitbewegten Bezugssystem ist. Eine Kreisbewegung vom ruhenden Bezugssystem aus gesehen wird von der Zentripetalkraft gemacht. Sollten wir dann nicht für 2. lieber die Gravitations- und die Zentripetalkraft verrechnen? Dadurch wird es nicht besser. Es würde die Werte für F_{tief} und F_{hoch} vertauschen, aber es gäbe immer noch einen veränderlichen Kraftbetrag bei gleichbleibendem Betrag der Beschleunigung. Sehr subtil sagt der Aufgabenteil 2, dass wir ins mitbewegte Bezugssystem gehen sollen, indem nicht nach der Kraft auf die Gondel, sondern auf die Gondel*aufhängung* gefragt ist. Das soll wohl eine sichere Formulierung sein, die verschiedenen Rechnungen für 1. und 2. zu bekommen, ohne den Wechsel der Bezugssysteme explizit zu erwähnen. Kräfte im rotierenden Bezugssystem können in der Schule auch allenfalls erwähnt werden; die zur tatsächlichen Herleitung benötigte Mathematik haben Schüler noch nicht. Dass die Ergebnisse zu 1. und 2. nicht nach $F = ma$ zusammenpassen, findet seine Erklärung darin, dass sie für verschiedene Bezugssysteme gelten.

Aber wirken im mitrotierenden Bezugssystem die Zentrifugalkraft und die Gravitationskraft? Die Gravitationskraft ist keine Scheinkraft im rotierenden Bezugsystem. Das mitbewegte Bezugssystem ist so gemacht, dass es angreifenden Kräften nachgibt. Im frei fallenden Fahrstuhl spüre ich keine Kraft, die mich am Boden der Kabine halten will. Sollte ich das im Fahrgeschäft, insbesondere, wenn es gerade abwärts geht? Später in diesem Artikel wird auch noch der frei durchfahrene Looping behandelt. Aber das hier betrachtete Fahrgeschäft ist kein Looping. Der Motor in der Mitte und die Stangen, an denen die Gondeln sitzen, müssen genau die Kräfte aufbringen, die die Gondeln mit bzw. trotz der Gravitation auf einer senkrechten Kreisbahn mit konstanter Bahngeschwindigkeit halten. Wir sind wieder bei der Betrachtung vom ruhenden Beobachter aus. Die Kräfte, die der Motor und die Stangen aufbringen, sind die Zwangskräfte. (Auch zu diesem Aspekt ist es völlig angebracht, dass Schüler zwar z.B. die Kraft der Unterlage bei der schiefen Ebene als Haltekraft identifizieren, jedoch das ganze Konzept der Zwangskräfte den Rahmen der Schulphysik übersteigt.)

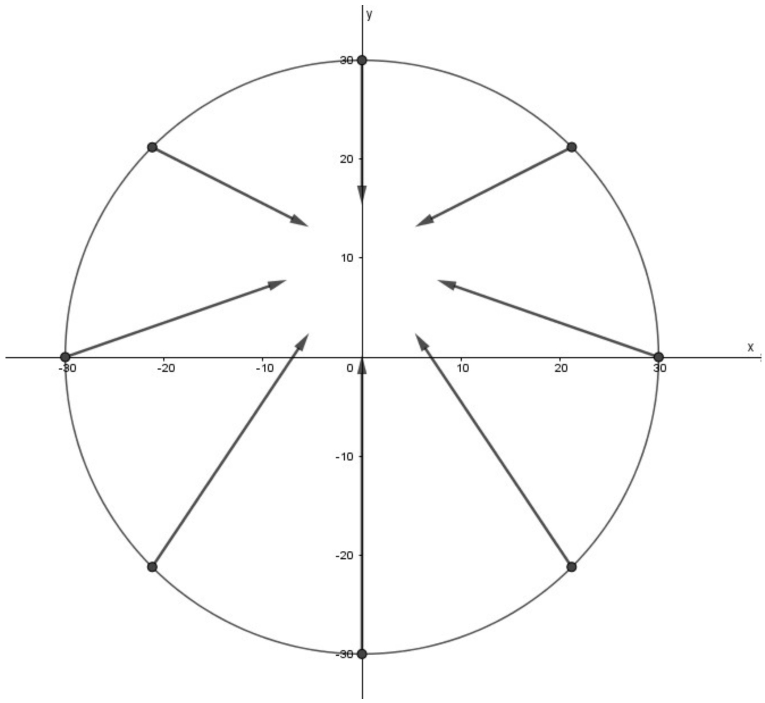
Wir beschreiben die Kreisbewegung einer Gondel durch den Ortsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$
Der Zeitnullpunkt liegt auf halber Höhe bei der Aufwärtsfahrt.

Als Beschleunigung brauchen wir also $\vec{a} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Die Gravitationskraft $\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ ist immer da. Zwangskräfte müssen also machen, dass

$\vec{F} = m\vec{a} = \begin{pmatrix} -mr\omega^2 \cos(\omega t) \\ -mr\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Zw,x} \\ F_{Zw,y} \end{pmatrix}$ ist. $\begin{pmatrix} F_{Zw,x} \\ F_{Zw,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mr\omega^2 \cos(\omega t) \\ mg - mr\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

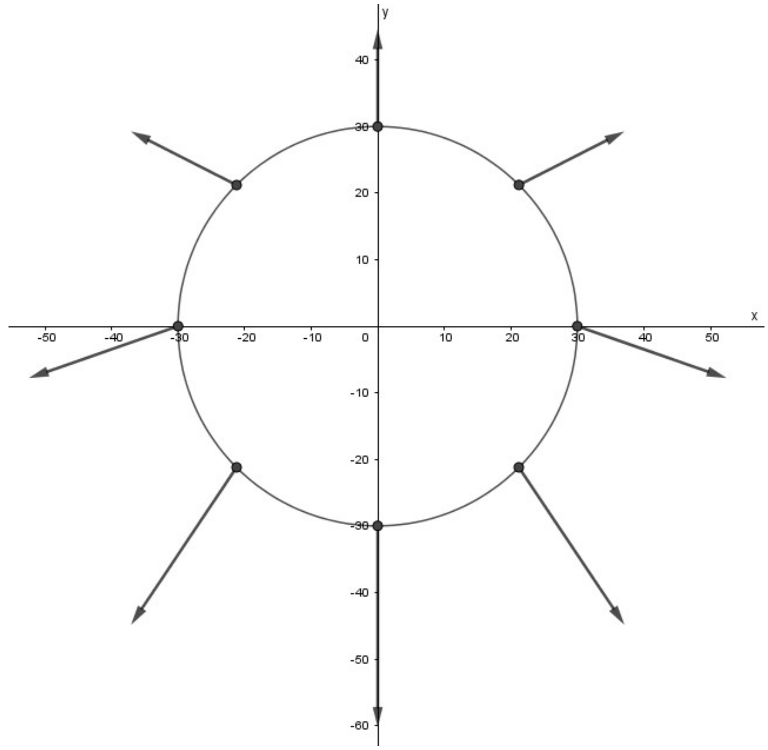
Hier sind Kräfte gezeichnet, die in der genannten Beispielaufgabe der Motor und die Stangen aufbringen müssen, um die Gondeln auf konstanter Bahngeschwindigkeit auf der vertikalen Kreisbahn zu halten. Der Maßstab für die Kräfte ist natürlich willkürlich und so, dass die Pfeile ohne sich zu überschneiden gut zu sehen sind. Wenn man an jedem Punkt die Gravitationskraft hinzunimmt, addieren sich die Kräfte zur Zentripetalkraft.



Die Kräfte, die der Motor und die Stangen machen müssen, sind eben nicht überall gleich groß. Im oberen Punkt hilft die Gravitation, damit es wieder abwärts geht, im unteren Punkt muss die Gravitation zusätzlich zur Kurve für die Kreisbahn überwunden werden. Auf dem Weg aufwärts ist offensichtlich ebenfalls gegen die Gravitation zu arbeiten. Auf dem Weg abwärts müssen Motor und Stangen die Gondeln sogar zurückhalten, damit diese nicht frei fallen, sondern die konstante Winkel- bzw. Bahngeschwindigkeit aufrecht erhalten wird. Man beachte auch, dass die Kraft, die eine Gondelstange zu halten hat, nicht nur in Längsrichtung der Stange ist. Der Motor muss mal mehr, mal weniger Drehmoment auf die Gondel geben.

Die Transformation der Beschleunigung vom stationären (s) ins rotierende Bezugssystem (r) $\vec{a}_r = \vec{a}_s - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s})$ hilft bei dem Problem aus dem Aufgabenteil auch nicht. (Der Coriolisterm wurde bereits weggelassen, da die Position der Gondel sich im Radius nicht ändert.)
$a_r = -\omega^2 r + \omega^2 r = 0$. Die Beschleunigung (und übrigens auch die Geschwindigkeit) im mitbewegten Bezugssystem ist Null, denn es ist ja das System, das sich mit der Gondel mitbewegt.
Die Frage ist vielmehr, welche Kraft die Gondelaufhängung bzw. ein Fahrgast *spürt*. Wenn ich auf dem Boden stehe, hält mich der Boden mit der Gegenkraft zu meiner Gewichtskraft. Ich spüre mein Gewicht. Wenn ich reibungsfrei eine schiefe Ebene hinunterrutsche, drückt die Gegenkraft zur Normalkraft von unten auf mich und ich spüre den entsprechenden Anteil meines Gewichts auf der Schräge. Die Hangabtriebskraft spüre ich nicht als Zug oder Druck, denn meine Bewegung gibt ihr voll nach. Man spürt die Gegenkraft zur Zwangskraft. Hierbei nimmt man die Kräfte lieber in einem Bezugssystem, das die Bewegung von außen betrachtet.

Die Gegenkraft zur Zwangskraft läuft bei der Aufgabe mit der vertikalen Kreisbewegung auf dasselbe hinaus wie die Addition von Gravitation und Zentrifugalkraft. Im folgenden Bild sind die von der Gondelaufhängung gespürten Kräfte dargestellt.



Im tiefsten Punkt haben wir $-\vec{F}_{Zw} = \begin{pmatrix} mr\omega^2\cos(1.5\pi) \\ -mg + mr\omega^2\sin(1.5\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg - mr\omega^2 \end{pmatrix}$

Im höchsten Punkt haben wir $-\vec{F}_{Zw} = \begin{pmatrix} mr\omega^2\cos(0.5\pi) \\ -mg + mr\omega^2\sin(0.5\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg + mr\omega^2 \end{pmatrix}$

Auf halber Höhe haben wir $-\vec{F}_{Zw} = \begin{pmatrix} mr\omega^2\cos(0) \\ -mg + mr\omega^2\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mr\omega^2 \\ -mg \end{pmatrix}$

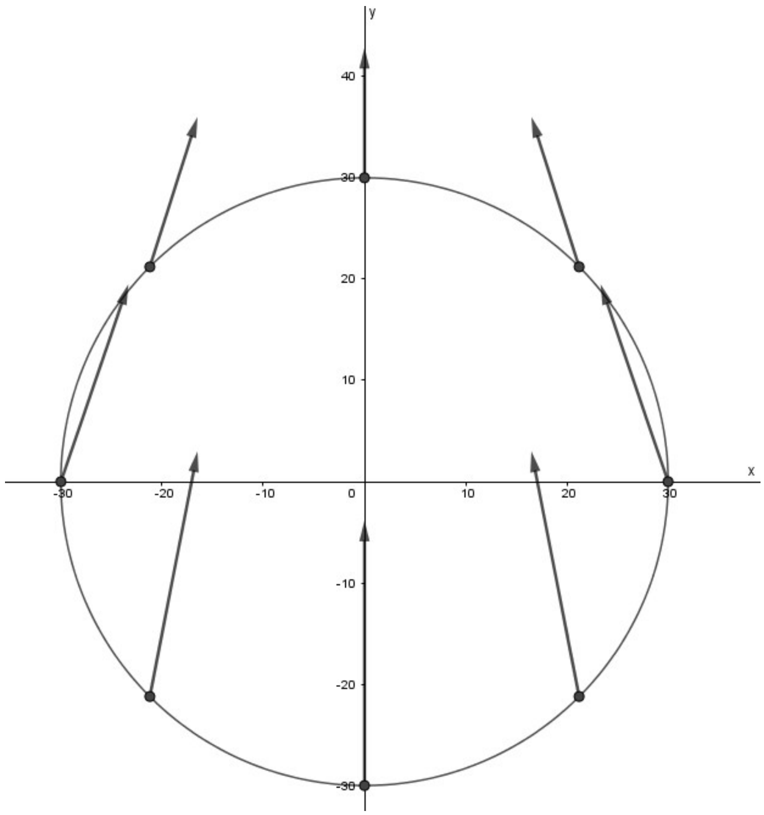
(wobei hier die Aufwärtsseite als Beispiel genommen wurde).
Daraus ergeben sich die Beträge der Kräfte wie in der Musterlösung.

Mit konstanter Winkel- bzw. Bahngeschwindigkeit ist es hier auch leicht möglich, die gespürte Kraft als Lösung für Aufgabenteil 2 als scheinbare Kraft im rotierenden Bezugssystem aufzufassen. Die Gravitation ist einfach eine Kraft. Sie bleibt dieselbe im stationären und im rotierenden Bezugssystem. Sie ist in dieser Herangehensweise als einzige äußere Kraft aufzufassen. Die Transformation ins mitrotierende Bezugssystem fügt die Zentrifugalkraft hinzu. Die Kraft im rotierenden System ist dann $\vec{F}_r = \vec{F}_G - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) = \vec{F}_G + \vec{F}_{Zentrifugal}$.

In der Geometrie nicht nur in einer vertikalen Ebene, sondern sogar einer Kugel werden üblicherweise die genaue Richtung des Schwerelots und der Betrag des Ortsfaktors auf der rotierenden Erde so durch vektorielle Addition von Gravitations- und Zentrifugalkraft berechnet (siehe z.B. Herbert Goldstein, Klassische Mechanik, Kapitel 4-9). Das Schwerelot zeigt außer am Äquator und an den Polen nicht genau zum Erdmittelpunkt.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie sich die geschilderte Betrachtung der Kräfte darstellt, wenn sich das Fahrgeschäft eher langsam dreht (man denke etwa an das London Eye), so dass vom Betrag her die Gravitationskraft auf eine Gondel mit Fahrgästen größer ist als die Zentrifugalkraft. Lassen wir jedoch der Einfachheit halber das Bild von starr mit den Stangen verbundenen Gondeln, in denen die Fahrgäste oben auf dem Kopf stehen, statt des gemütlichen Riesenrads, wo die Gondeln in jeder Position nach unten hängen. Wir lassen $m = 400$ kg und $r = 30$ m, verringern aber die Geschwindigkeit zu $v = 10$ m/s. Dann sind

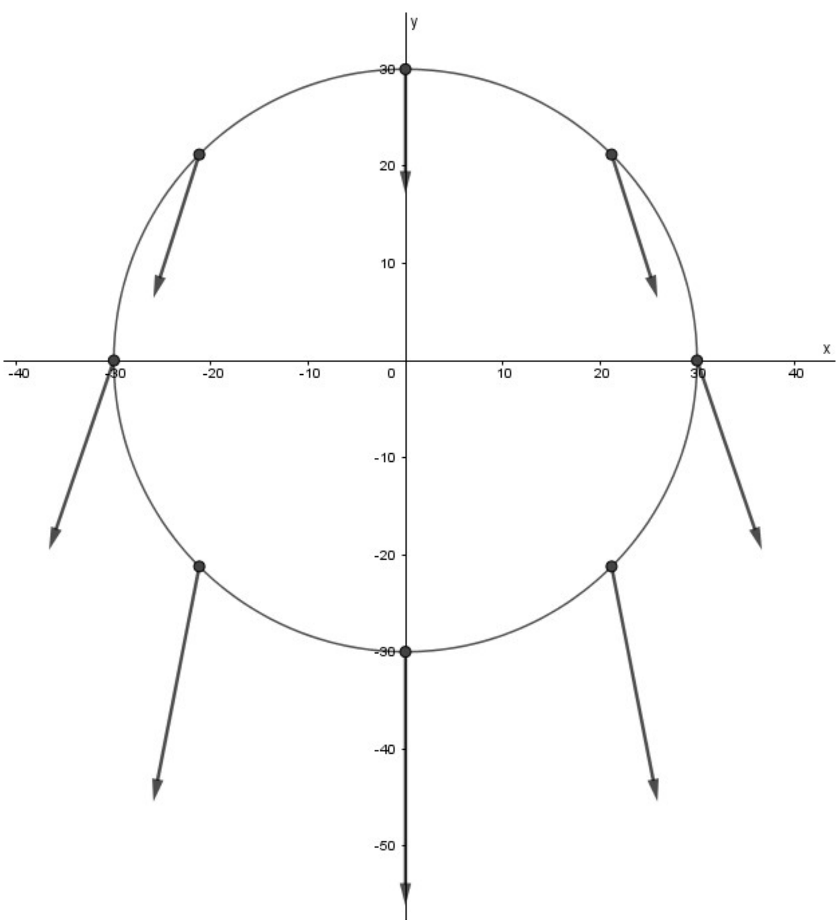
$$F_G = m \cdot g = 400\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3924\,\mathrm{N} \quad \text{und} \quad F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = 400\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(10\,\mathrm{m/s})^2}{30\,\mathrm{m}} = 1333\,\mathrm{N}$$



Die Formel für die Zwangskräfte gilt wie in der Abituraufgabe. Hier sind diese Zwangskräfte gezeichnet. Der Maßstab ist ein anderer als im vorherigen Beispiel.

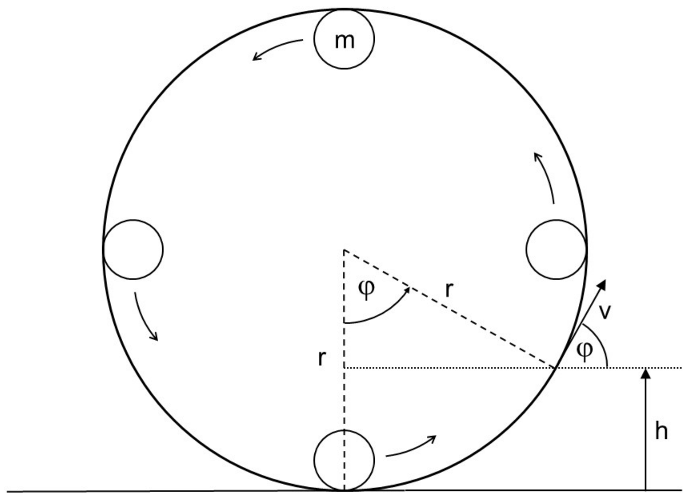
Wiederum gilt, dass die Zentripetalkraft resultiert, wenn man in jedem Punkt die Gravitationskraft hinzurechnet.

Wegen der geringen Drehgeschwindigkeit muss aber die Stange die Gondel oben auf der Bahn nicht nach innen ziehen, sondern trotz Fliehkraft noch nach oben stemmen.



Auch in diesem Beispiel ist die Kraft, die die Gondelaufhängung bzw. -befestigung spürt, die zur Zwangskraft entgegengesetzte Kraft. Und dieses Bild zeigt das Resultat aus Gravitations- und Zentrifugalkraft und deutlich, dass mit den Werten hier die Gravitation überwiegt.

In einem kreisförmigen Looping, in den ein Fahrzeug mit einer Anfangsgeschwindigkeit, aber dann ohne weiteren eigenen Antrieb einfährt, ist die Winkel- bzw. Bahngeschwindigkeit nicht konstant. Und es gibt die Bedingung, dass das Fahrzeug oben nicht aus dem Looping fallen darf, die häufig Thema von Schulaufgaben ist. Um zu zeigen, dass die in Schulaufgaben angeführten Bilanzen von Gravitation und Zentrifugalkraft stimmen, sollen hier Formeln für die Beschleunigung und die Zwangskraft aufgestellt werden, die natürlich über ein Schulniveau hinausgehen.
Von Reibungsverlusten wird abgesehen. Die augenblickliche Bahngeschwindigkeit ergibt sich dann aus der Energieerhaltung. v_0 sei die Anfangsgeschwindigkeit bei Einfahrt unten waagerecht in den Looping. Ich wähle als Laufparameter den Winkel φ und beginne mit $\varphi = 0$ im untersten Punkt (das ist anders gewählt als vorher bei dem Fahrgeschäft mit starren Gondelarmen).



Für die Energie muss gelten $\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h$

Die momentane Höhe ist $h(\varphi) = r - r\, \cos(\varphi) = r\,(1 - \cos(\varphi))$

Einsetzen und nach v auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h &= \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \\
\frac{1}{2}\, v^2 + g\, r\,(1 - \cos(\varphi)) &= \frac{1}{2}\, v_0^2 \\
v &= \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, r\,(1 - \cos(\varphi))}
\end{aligned}$$

Der Ortsvektor (hier gebrauche ich $\vec{r}$, nicht $\vec{s}$, als Bezeichnung) des Fahrzeugs ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\, \sin(\varphi) \\ r\,(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Ob der Nullpunkt des Ortsvektors im unteren Punkt oder im Kreismittelpunkt liegt, ist egal. Ein konstanter Anteil fällt sowieso beim Ableiten gleich weg.

Damit ist die Geschwindigkeit als Vektor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} r\, \cos(\varphi) \\ r\, \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$

Andererseits kennen wir den Betrag der Geschwindigkeit und müssen sie nur so in x- und y-Komponente einteilen, dass sie entlang der Kreisbahn ist:

$$\vec{v} = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 - \cos(\varphi))} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die nützliche Beziehung $r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1-\cos(\varphi))}$

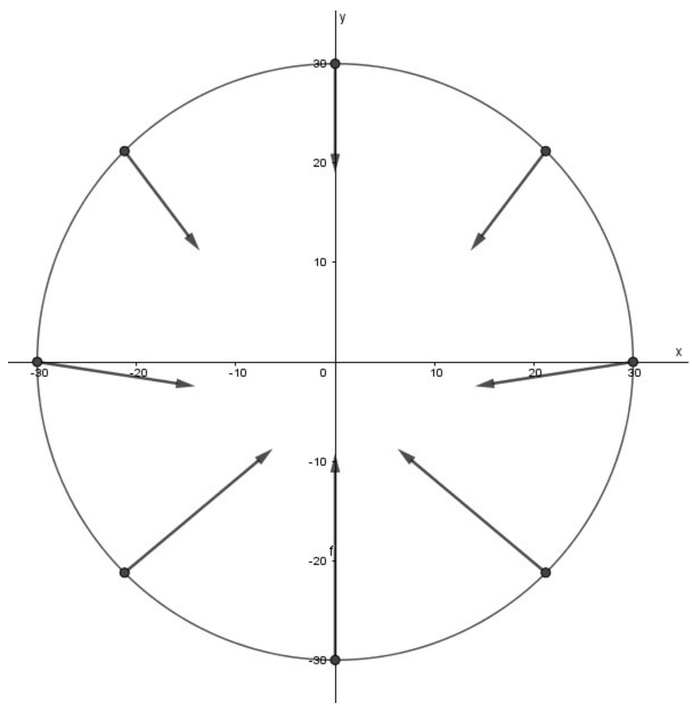
Die zweite Darstellung von $\vec{v}$ wird nochmal nach der Zeit abgeleitet, um einen Ausdruck für die Beschleunigung zu erhalten.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1-\cos(\varphi))} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{-2gr\sin(\varphi)}{2\sqrt{v_0^2 - 2gr(1-\cos(\varphi))}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Für $d\varphi/dt$ wird die Wurzel durch r eingesetzt.

$$\vec{a} = \frac{v_0^2 - 2gr(1-\cos(\varphi))}{r} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} - g\,\sin(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{v^2}{r} - g\,\sin(\varphi) \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

Das sind die Zentripetalbeschleunigung und die wirksame Komponente aus der Gravitationskraft tangential zur Bahn. Ein Anteil der Gravitationskraft, der in radialer Richtung wirkt, ist im ersten Teil v^2/r bereits enthalten. Aber im Looping ändert sich ja auch die Geschwindigkeit entlang der Bahn. Auf dem Weg nach oben wird das Fahrzeug langsamer, auf dem Weg nach unten wieder schneller. Das folgende Bild zeigt die wahre Kraft (Maßstab für die Kräfte willkürlich). Die Masse ist für das qualitative Verhalten egal, es wurde mit $m = 1$ kg gerechnet. Sonst waren für dieses Beispiel $r = 30$ m und $v_0 = 50$ m/s.



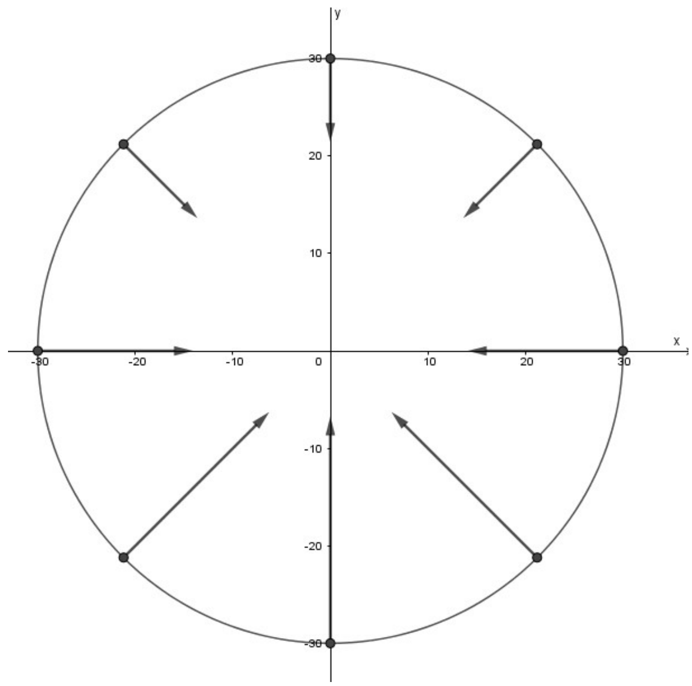
Wir brauchen die eben errechnete Beschleunigung, damit die Loopingfahrt entsprechend der Energieerhaltung so abläuft, wie sie abläuft. Welches Zusammenspiel von Kräften liefert genau die Kraft $\vec{F} = m\,\vec{a}$? Die Gravitation $\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ ist natürlicherweise vorhanden.

Alles andere muss die Bahn als Zwangskraft machen:

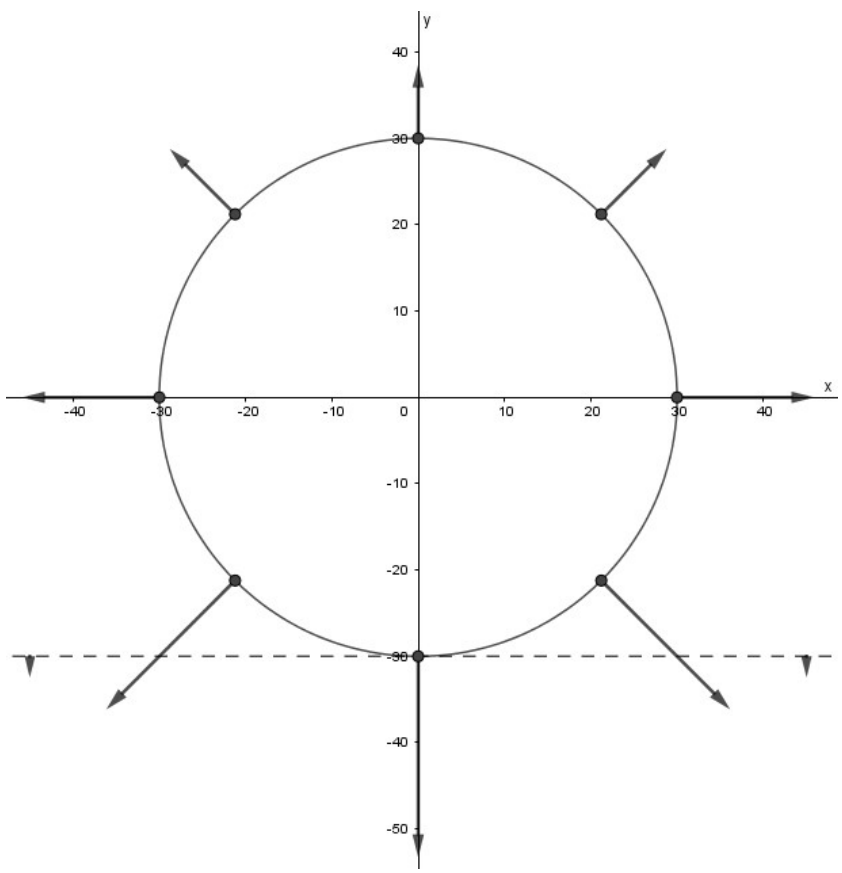
$$\vec{F}_{Zw} = m\,\vec{a} - \vec{F}_G = \frac{mv_0^2 - 2mgr(1-\cos(\varphi))}{r} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} - mg\,\sin(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Der erste Faktor ist hier absichtlich mit v_0 und φ statt abgekürzt als mv^2/r geschrieben, damit man die Zwangskraft mit Parameter φ in einem Tabellenkalkulationsprogramm als Formel eingeben kann.

Während die Beschleunigung des Fahrzeugs nicht überall zum Kreismittelpunkt zeigt, da die Winkelgeschwindigkeit eben nicht konstant ist, muss die Zwangskraft in radialer Richtung sein; eine Kraft quer zum Radius kann die Bahn durch ihr bloßes Vorhandensein nicht machen. Das folgende Bild zeigt die Zwangskraft.



Die vom Fahrzeug gespürte Kraft ist wiederum die Gegenkraft zur Zwangskraft und im folgenden Bild dargestellt.



Wenn das Fahrzeug vor und nach dem Looping auf der Waagerechten fährt, spürt es nur seine Gewichtskraft (diese ist im letzten Bild mit angedeutet, allerdings im Beispiel im Vergleich so klein, dass die Pfeile in diesem Maßstab fast verschwinden). Im Moment des Einfahrens in den Looping kommt die Zentrifugalkraft hinzu bzw. ist sie beim Ausfahren aus dem Looping dann plötzlich weg. Beim Ein- und Ausfahren gibt es tatsächlich abrupte Änderungen in der Beschleunigung und der Kraft; bei einem Übergang von einem Kreis in eine Gerade ändert sich die Krümmung unstetig.

Hierzu sei ein kleiner Teil einer Abituraufgabe für das berufliche Gymnasium (TG) in Baden-Württemberg von 2018 sinngemäß zitiert:
Ein Looping für einen Spielzeugwagen hat einen Radius von 30 cm. Der Wagen hat die Masse 50 g und fährt mit 6 m/s in den Looping ein. Eine Teilaufgabe lautet: Berechnen Sie die Kraft, mit welcher der Wagen im untersten Punkt des Kreisbogens die Schiene belastet.
Lösung: Hier ist die Zwangskraft bzw. vom Wagen gefühlte Kraft gemeint. Das entpricht im entwickelten Schema $\varphi = 0$ und der Summe aus Zentrifugalkraft mit v_0 und Gravitationskraft.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{Zw,unten} &= \frac{mv_0^2 - 2mgr(1-\cos(0))}{r}\begin{pmatrix}-\sin(0)\\ \cos(0)\end{pmatrix} - mg\sin(0)\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \sin(0)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\ \frac{mv_0^2}{r} + mg\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit den genannten Zahlen: $F_{Zw,unten} = \dfrac{0.05\,\mathrm{kg}\cdot(6\,\mathrm{m/s})^2}{0.3\,\mathrm{m}} + 0.05\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 6.5\,\mathrm{N}$

Auch in einem älteren Schulbuch (Höfling, Physik-Aufgaben, Dümmler 1989) findet sich eine Aufgabe zu Kräften bei der vertikalen Kreisbewegung:
Ein Körper mit der Masse $m = 0.2$ kg wird an einem $r = 40$ cm langen Faden in einer vertikalen Ebene auf einem Kreis herumgeschleudert. In seinem oberen Bahnpunkt hat er die Geschwindigkeit $v_o = 2$ m/s, in seinem unteren Bahnpunkt beträgt die Geschwindigkeit $v_u = 4.44$ m/s. Der Körper möge so klein sein, dass seine räumliche Ausdehnung vernachlässigt werden kann. Im höchsten Bahnpunkt übt der Faden die Kraft $\vec{F}_o$, im tiefsten Bahnpunkt die Kraft $\vec{F}_u$ auf den Körper aus. Berechnen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F}_o$ und $\vec{F}_u$.
Zunächst einmal sei bemerkt, dass die Geschwindigkeiten so gegeben sind, dass die Energiebilanz stimmt: $\dfrac{1}{2}\cdot 0.2\,\mathrm{kg}\cdot\left(4.438\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 0.2\,\mathrm{kg}\cdot\left(2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 0.2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.8\,\mathrm{m}$
(4.438 m/s ist besser, 4.44 m/s ist gerundet.)
Die Kraft, die der Faden ausübt, ist wiederum die Zwangskraft. Für die gefragten Punkte lässt sich selbstverständlich einfacher als mit meiner Formel sagen, dass im oberen Punkt die Differenz von Zentrifugalkraft und Gewichtskraft zu bilden ist und im unteren Punkt wieder die Summe der beiden.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{Zw,oben} &= \frac{mv_0^2 - 2mgr(1-\cos(\pi))}{r}\begin{pmatrix}-\sin(\pi)\\ \cos(\pi)\end{pmatrix} - mg\sin(\pi)\begin{pmatrix}\cos(\pi)\\ \sin(\pi)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\ \frac{mv_0^2-2mgr(1+1)}{r}\cdot(-1)+mg\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{mv_0^2}{r}+5mg\end{pmatrix}\\
&= \frac{mv^2}{r}\begin{pmatrix}-\sin(\pi)\\ \cos(\pi)\end{pmatrix} - mg\sin(\pi)\begin{pmatrix}\cos(\pi)\\ \sin(\pi)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{mv^2}{r}+mg\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$F_o = \left|-\frac{0.2\,\mathrm{kg}\cdot(4.438\,\mathrm{m/s})^2}{0.4\,\mathrm{m}} + 5\cdot 0.2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right| = \left|-\frac{0.2\,\mathrm{kg}\cdot(2\,\mathrm{m/s})^2}{0.4\,\mathrm{m}} + 0.2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right| = 0.038\,\mathrm{N}$$

(Die Differenz ist sehr klein, deshalb sehr empfindlich auf Runden von v_u.)

"Herleitung" von F_u siehe letztes Beispiel. $F_u = \dfrac{0.2\,\mathrm{kg}\cdot(4.438\,\mathrm{m/s})^2}{0.4\,\mathrm{m}} + 0.2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 11.8\,\mathrm{N}$