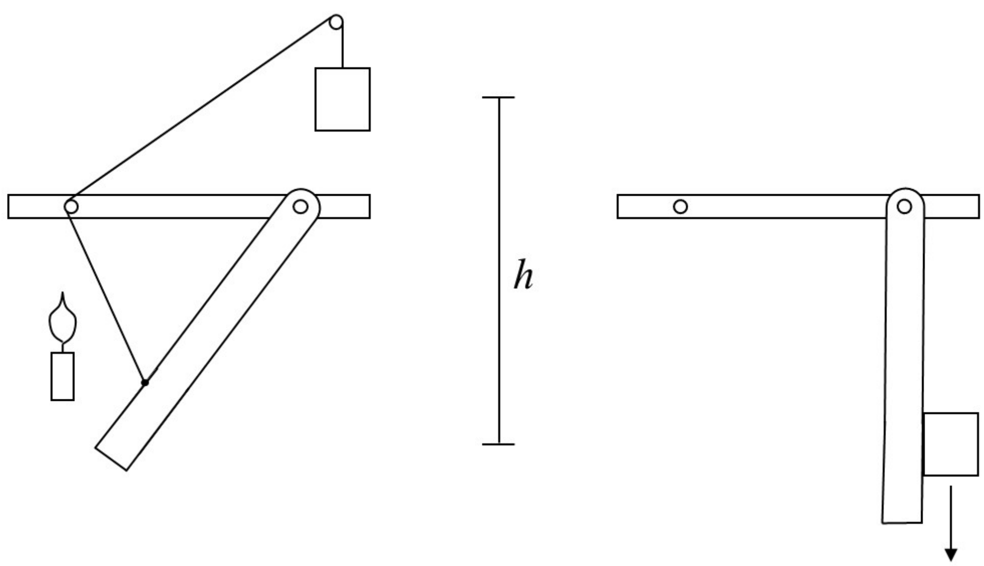
Das Whiting-Pendel

In unserer Physiksammlung fand ich einen Holzblock mit zwei Stangen, von denen eine einen kleinen Schlitz hat, und einen Holzstab mit einem Aufhänger am einen Ende, einem Metallgewicht am anderen Ende und einem seitlich angebrachten Haken. Ich wusste nicht, was das ist, auch nicht, dass diese beiden Teile zusammengehören. Durch Zufall erfuhr ich, dass es sich um das Whiting-Pendel handelt (danke an Sven Pfleger aus Würzburg).

Im Internet lassen sich zwei kurze Beschreibungen und ein Video finden:
https://www.leifiphysik.de/mechanik/freier-fall-senkrechter-wurf/aufgabe/
bestimmung-der-fallbeschleunigung-nach-whiting
https://www.waldorf-ideen-pool.de/Schule/faecher/physik/klasse-10/
bestimmung-der-fallbeschleunigung-nach-whiting
https://www.youtube.com/watch?v=89alBxMTG8o
(CTSC practical experiment - Determine the value of ‘g’)

Auf wen der Name Whiting-Pendel zurückgeht, konnte ich nicht herausfinden.



schematische Darstellung des Versuchsaufbaus und Versuchsablaufs

Der Versuchsaufbau besteht aus dem Holzstab als Pendel und einem Gewicht, das fallengelassen wird. Ein dünner Faden hält zunächst das Gewicht und auch das Pendel in seiner ausgelenkten Position. Der Faden wird durchgebrannt, so dass gleichzeitig das Gewicht zu fallen beginnt und das Pendel zu schwingen. Weit kommt es allerdings nicht ungehindert. Nach einer Viertelschwingung, wenn das Pendel in der senkrechten Stellung ist, berührt es das fallende Gewicht; die Aufhängung des Gewichts muss genau so gewählt werden. In Wirklichkeit schlagen das Pendel und das Gewicht zusammen. Dabei muss man dafür sorgen, dass das Gewicht eine Markierung am Pendel hinterlässt. Wer so etwas von der Schreibmaschine noch hat, kann Kohlepapier verwenden. Ich habe bei meinem Gewicht den unteren Rand mit blauer Kreide angemalt und das Pendel mit einem normalen Papierstreifen versehen. Die etwas umständliche Anbringung an der Kante des Laborwagens ist hier nur der begrenzten Spannweite der vorhandenen Schraubzwingen zuzuschreiben (siehe folgende Fotos).

Der Versuch rühmt sich, die Erdbeschleunigung g zu bestimmen, ohne elektronische Messgeräte zu erfordern. (Für Fallversuche im Unterricht werden ja häufig Lichtschranken oder eine Kombination aus Magnethalterung und Sensorplatte verwendet, weil bei kurzen Fallstrecken die Zeit von Hand schwer zu stoppen ist. - Meine Schüler waren da allerdings mit den Stoppuhr-Apps auf ihren Handys ziemlich gut! - Aber denken wir im Kontext des Whiting-Pendels eher an die alten mechanischen Stoppuhren aus dem Physikschrank.)

oben: der Faden hält das Gewicht und das Pendel

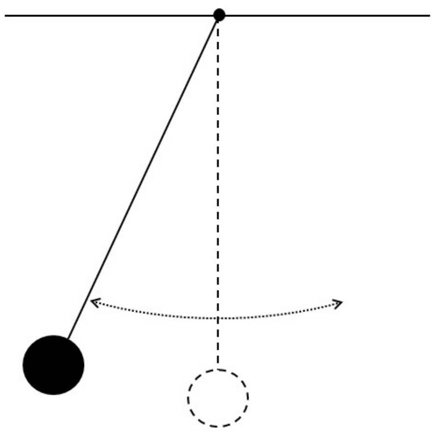
rechts oben: Aufhängung des Gewichts platzieren

rechts unten: die Markierung am Pendel nach dem Fall

Beim Whiting-Pendel fällt das Gewicht die Höhe h in der Zeit $T/4$, wenn T die Schwingungsdauer des Pendels ist. h kann man einfach messen. (Eine Höhenmarkierung, wo sich das Gewicht vorher befand, fehlt auf meinen Fotos noch, aber ein Maßstab, ein langes Lineal in senkrechter Stellung, ließe sich ja einfach an der Tischkante noch anbringen. Alternativ könnte man das Gewicht auch erst vom oberen Ende des pendelnden Holzstabs fallen lassen. Für das untere Ende der Fallstrecke ist eben die Aufschlagmarkierung nötig.)

Man braucht noch T. Dazu lässt man das Pendel (ohne Faden und Gewicht) frei schwingen. Man stoppt z.B. die Zeit für zehn Schwingungen. Das ist mit jeder Art Stoppuhr machbar, und bei zehn Schwingungen machen Reaktionszeiten beim Betätigen einer Stoppuhr nur einen geringen relativen Fehler. Die Erdbeschleunigung g wird dann berechnet aus

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^2$$



Fadenpendel

Das Whiting-Pendel erscheint eine umständliche Methode, den Wert von g zu bestimmen. g kann man einfacher aus der Messung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels bestimmen. Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels der Länge l beträgt $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Um Messfehler durch die Reaktionszeit beim Drücken einer Stoppuhr gering zu halten, misst man hier ebenso die Dauer von z.B. zehn Schwingungen, erhält T durch Division durch 10 und g aus der umgestellten Formel $g = \frac{4\pi^2\, l}{T^2}$.

Dazu muss die Mechanik soweit etabliert sein, die Pendelbewegung auf dieselbe Ursache zurückzuführen, nämlich die Gewichtskraft $m \cdot g$, wie den freien Fall. Beim Pendel ist die rücktreibende Kraft der Kraftanteil der Gewichtskraft entlang der Bahn, welche ein Teil eines Kreises ist. Mit der Kleinwinkelnäherung eliminiert man den Sinus aus der Differentialgleichung und erhält die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ und die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Im Versuch mit dem Whiting-Pendel soll die Pendelbewegung das Zeitmaß geben. Man möchte die Zeit in gängigen Sekunden haben, aber elektronische Hilfsmittel sollen vermieden werden. Worauf kann ein rein mechanisches Zeitmaß basieren? Wohl kaum z.B. auf dem Elektronenniveauübergang einer Atomuhr. Mit den Himmelsbewegungen sollte es passen. Eine Sekunde sollte möglichst so dargestellt werden, dass ein Tag $60 \cdot 60 \cdot 24 = 86400$ Sekunden hat. Die irdische mechanische Uhr ist jedoch das Sekundenpendel. Man legt eine Pendellänge fest und sagt, dass für diese eine Halbschwingung eine Sekunde ist. Damit ist der Wert von g dann per Definition festgelegt. Was eine Sekunde ist, basiert darauf.

Wenn wir uns beim Whiting-Pendel-Versuch auf rein mechanische Messapparaturen beschränken wollen, muss die Uhr ein mechanisches Pendel sein. Vielleicht wird die Schwingungsdauer des Whiting-Pendels mit der des Sekundenpendels verglichen und in Bruchteilen des Sekundenpendels ausgedrückt. In der Maßeinheit der Uhr steckt das g, das der Versuch messen soll. Das ist ein Zirkelschluss.
Wenn wir hingegen eine andere als eine Pendeluhr zur Verfügung haben, eine elektronische oder Quarzuhr, können wir zur Bestimmung von g einfach die Schwingungsdauer eines Fadenpendels messen.

Auf der folgenden Seite soll noch die Schwingungsdauer eines Stabpendels im Gegensatz zu einem Fadenpendel hergeleitet werden. Das ist Standardphysik, jedoch eventuell von Interesse anlässlich des Whiting-Pendels.

Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels leitet man aus dem Grundgesetz der Mechanik $F = m \cdot a$ her. Die Kraft ist $-m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ und die Beschleunigung lässt sich als $l \cdot \ddot{\alpha}$ ausdrücken, wenn α der Auslenkwinkel des Pendels ist. Einsetzen und die Kleinwinkelnäherung liefern

$$-m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot l \cdot \ddot{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad -g \cdot \alpha = l \cdot \ddot{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \cdot \alpha$$

woraus man mit dem Ansatz $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega\, t)$ die Kreisfrequenz ω direkt abliest.

Man kann auch für das Fadenpendel das Gesetz für Drehbewegungen $M = J \cdot \ddot{\alpha}$ benutzen, mit dem Drehmoment M und dem Trägheitsmoment J.
Das Trägheitsmoment des Fadenpendels bezüglich seines Aufhängepunkts lautet $J = ml^2$ und das Drehmoment ist $M = -l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$.
Einsetzen und die Kleinwinkelnäherung liefern so ebenfalls

$$-l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \cdot \alpha$$

Damit sich hier in diesem theoretischen Teil beim Whiting-Pendel dessen Trägheitsmoment durch seine Masse und Länge ausdrücken lässt, sei angenommen, dass es sich um einen homogenen Holzstab handelt ohne abgeschrägte Ecken oben und ohne zusätzliches Metallgewicht unten (siehe z.B. das anfangs angeführte Video). Das Trägheitsmoment eines Stabs bezüglich einem seiner Enden ist $J = ml^2/3$. Das Drehmoment wird von der Gewichtskraft verursacht, die in der Mitte am Massenschwerpunkt angreift, also mit Hebelarm $l/2$. Und das Drehmoment ist natürlich mit dem Faktor $\sin(\alpha)$ vom Winkel abhängig. Einsetzen in $M = J \cdot \ddot{\alpha}$ und wiederum Benutzen der Kleinwinkelnäherung führt auf

$$-\frac{l}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{3}\, m \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \alpha = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \ddot{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\alpha} = -\frac{3g}{2l} \cdot \alpha$$

Daraus folgt $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$ und $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{2l}{3g}} = \sqrt{\dfrac{8\pi^2 l}{3g}}$.

Setzen wir dies einmal in die Fallgleichung für das Whiting-Pendel ein:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{8\pi^2 l}{3g} = \frac{\pi^2}{12} \cdot l \approx 0.82 \cdot l$$

Mit der theoretisch hergeleiteten Schwingungsdauer fällt g heraus aus der Fallhöhe und wir lernen, dass das Gewicht immer 82% der Pendellänge fällt, bis es durch Zusammenstoß die Markierung am Whiting-Pendel setzt (homogener Stab vorausgesetzt).